MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
23.11.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie $\det A$, $\det B$ und $\det C$.
   b) Bestimmen Sie $\det(-A)$, $\det(A \cdot A^\top)$, $\det(B^{-1} \cdot C)$ sowie $\det(B - C)$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

   a) Berechnen Sie die Determinante $\det A$.
   b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $B^{2018} = A$?

3. Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle a, b, $c \in \mathbb{R}$, so daß $\det(A_{a,b,c}) = 0$.
   b) Bestimmen Sie alle a, b, $c \in \mathbb{R}$, so daß für die Äquivalenznormalform $\overline{A}_{a,b,c}$ gilt

$$\overline{A}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die folgende $n \times n$–Matrix gegeben:

$$T_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Determinanten-Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) \qquad \text{für} \quad n > 2.$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(T_n) = 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abgabe bis 30.11.2018, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).