

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Untersuchen Sie durch Umformung in Zeilenstufenform die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

auf Invertierbarkeit.

2. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

invertierbar ist, und geben Sie für diese t die inverse Matrix A_t^{-1} an.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$.

Bringen Sie mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen die Matrix A auf Äquivalenznormalform $\bar{A}$ und bestimmen Sie $F \in GL_4(\mathbb{R})$ und $G \in GL_3(\mathbb{R})$ mit

$$\bar{A} = F \cdot A \cdot G.$$

4. a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei die Relation „ $\approx$ “ definiert als

$$A \approx B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists F \in GL_m(\mathbb{R}) \quad \exists G \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad B = F \cdot A \cdot G.$$

Zeigen Sie, daß dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ definiert ist.

Hinweis: Sie müssen also für $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zeigen:

$$\text{i) } A \approx A \quad \text{ii) } A \approx B \implies B \approx A \quad \text{iii) } A \approx B \wedge B \approx C \implies A \approx C.$$

- b) Zeigen Sie, daß zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ genau dann gemäß a) äquivalent sind, wenn sie die gleiche Äquivalenznormalform besitzen.
- c) Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad B_s = \begin{pmatrix} s & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(gemäß a)) äquivalent sind.