MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
25.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. *(vgl. Herbst 2000, Thema 1, Aufgabe 1)*

   V sei ein reeller Vektorraum und v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V. Der Untervektorraum $U \subset V$ werde von den Vektoren u_1, u_2 und u_3 aufgespannt, der Untervektorraum $W \subset V$ von w_1 und w_2, wobei

   $$u_1 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4, \quad u_2 = 2v_2 + 3v_3, \quad u_3 = -v_1 + v_2 + 4v_4,$$

   $$w_1 = 2v_2 + v_3 + v_4, \quad w_2 = -2v_1 + 3v_3 + 2v_4.$$

   a) Untersuchen Sie, ob $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ in U liegt.

   b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

   c) Ergänzen Sie Ihre Basis von $U \cap W$ aus b) zu einer Basis von $U + W$.

2. *(vgl. Herbst 2015, Thema 2, Aufgabe 1)*

   Im $\mathbb{R}$–Vektorraum V aller reellen Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ betrachte man den von

   $$p_1 = X^3 - 1, \quad p_2 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_3 = X^3 - X^2$$

   erzeugten Untervektorraum U von V.

   a) Man zeige: $\dim U = 3$.

   b) Man zeige: U ist die Menge aller Polynome $p \in V$, die eine Nullstelle bei 1 besitzen.

   c) Man ergänze p_1, p_2, p_3 zu einer Basis von V.

3. *(vgl. Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 1)*

   Welche Dimension kann der Durchschnitt eines dreidimensionalen und eines vierdimensionalen Untervektorraums in einem sechsdimensionalen Vektorraum V haben? Belegen Sie jede der von Ihren gefundenen Möglichkeiten durch ein Beispiel mit $V = \mathbb{R}^6$.

4. Für die beiden Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   bestimme man jeweils den Rang von A und B sowie von $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Abgabe bis 1.2.2019, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).