MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
18.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

sowie $U := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subset \mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie eine Basis von U und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

2. *(Herbst 2016, Thema 2, Aufgabe 1)*
Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller 2×2-Matrizen betrachte man den von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum U, sowie den von

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum W.

   a) Man ermittle die Dimensionen $\dim U$ und $\dim W$ von U und W.
   b) Man bestimme eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot C$.
   c) Man berechne $\dim(U + W)$.
   d) Man ergänze die Matrix C von b) zu einer Basis von $U + W$.

3. *(Frühjahr 2002, Thema 3, Aufgabe 1)*
Es seien a, b, c und d linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannten Unterraums.

4. *Wir zeigen hier die Variante 5.14 des Basisergänzungssatzes im Fall $r = n - 1$:*
Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit $\dim V = n > 1$. Sei $b_1, ...b_n$ eine Basis von V und sei $v_1, ..., v_{n-1} \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß es ein Element b_j aus der Basis $b_1, ...b_n$ gibt, so daß

$$v_1, ..., v_{n-1}, b_j$$

eine Basis von V ist.

Abgabe bis 25.1.2019, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).