MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
10.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a)

- Wegen $0 \in U_1$ ist $U_1 \neq \varnothing$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 = 2x_2 - 3x_3$ und $y_1 = 2y_2 - 3y_3$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$x_1 + y_1 = (2x_2 - 3x_3) + (2y_2 - y_3) = 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3),$$

also $x + y \in U_1$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda x_1 = \lambda (2x_2 - 3x_3) = 2(\lambda x_2) - 3(\lambda x_3),$$

also $\lambda \cdot x \in U_1$. Folglich ist nach dem Untervektorraumkriterium U_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Alternativ kann man auch so argumentieren: U_1 ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

also nach 4.13 b) ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

- Es ist $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$ und $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$, aber $\lambda x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_2$. Damit ist U_2 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
... oder mit dieser Begründung: Es ist $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2$, also ist wegen 4.9 U_2 kein UVR.

- Es ist $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3$ und $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U_3$, aber $x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U_3$. Damit ist U_3 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

- Wir zeigen zunächst

$$U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \cdot x_3 \text{ und } x_2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0\}.$$

„$\subset$“ Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1 = x_2 \cdot x_3$ und $x_2 = 0$. Dann ist $x_1 = x_2 \cdot x_3 = 0 \cdot x_3 = 0$.
„$\supset$“ Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Dann ist $x_1 = 0 = 0 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3$.

Nun ueberprüfen wir das Untervektorraumkriterium: Wegen $0 \in U_4$ ist $U_4 \neq \varnothing$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ sowie $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0,$$

also $x + y \in U_4$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda\, x_1 = \lambda \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda\, x_2 = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda \cdot x \in U_4$. Folglich ist nach dem Untervektorraumkriterium U_4 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

b)
- Das Nullpolynom ist kein Polynom vom Grad 2 (sondern hat Grad -1), also ist es kein Element von W_1, also ist W_1 nach 4.9 kein UVR von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.
- W_2 ist die Menge aller reellen Vielfachen des Polynoms $x^3 - x + 2$, also

$$W_2 = \mathbb{R} \cdot (x^3 - x + 2);$$

also ist W_2 gemäß 4.10 a) ein UVR von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

2. a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{IV}+3\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+2\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Beim Lösen des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ sind damit x_3 und x_5 freie Variable. Wir wählen also $x_3 = \mu$ frei und $x_5 = \lambda$ frei, und erhalten durch Auflösen von unten her:

$$\begin{aligned} & & x_5 &= \lambda \\ -3x_4 - \lambda = 0 &\Longrightarrow & x_4 &= -\frac{1}{3}\lambda \\ & & x_3 &= \mu \\ -x_2 + \mu - 2(\frac{1}{3}\lambda) - \lambda = 0 &\Longrightarrow & x_2 &= -\frac{1}{3}\lambda + \mu \\ x_1 + \mu - (-\frac{1}{3}\lambda) + \lambda = 0 &\Longrightarrow & x_1 &= -\frac{4}{3}\lambda - \mu \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge L_0 des homogenen LGS $A \cdot x = 0$

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\lambda - \mu \\ -\frac{1}{3}\lambda + \mu \\ \mu \\ -\frac{1}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Es ist $x_p \in \mathbb{R}^5$ genau dann eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für ein $b \in \mathbb{R}^4$, wenn

$$b = A \cdot x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

gilt; für die Lösungsmenge L von $A \cdot x = b$ ergibt sich dann gemäß 4.14

$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. • Die Teilmenge

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

ist als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_1 \cdot x = b$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gemäß 4.13 b) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.
Ferner ist auch die Teilmenge

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_2 \cdot x = b$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gemäß 4.13 b) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

• Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$x \in U \cap W \iff x \in U \quad \text{und} \quad x \in W$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Wir lösen dieses homogene LGS; die Lösungsmenge ist $U \cap W$. Wegen

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich durch Auflösen von unten nach oben mit $x_4 = \lambda$ als freie Variable

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \,\Big|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Seien $\quad U := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ und $\quad W := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann sind $U, W \subset \mathbb{R}^2$ Untervektorräume, aber $U \cup W \subset \mathbb{R}^2$ ist **kein** UVR, denn in 4.8 (UVR-Kriterium) ist ii) nicht erfüllt: Es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup W, \text{ aber } \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup W.$$

b) "$\Longleftarrow$": Ist $U \subset W$, so ist $\quad U \cup W = W \subset V \quad$ UVR. $\quad \surd$
Ist $W \subset U$, so ist $\quad U \cup W = U \subset V \quad$ UVR. $\quad \surd$

"$\Longrightarrow$": Sei $U \cup W \subset V$ ein UVR.

<u>Annahme</u>: Es gilt <u>nicht</u> $U \subset W$ und auch <u>nicht</u> $W \subset U$.
Damit gibt es also $u \in U$ mit $u \notin W$ und $w \in W$ mit $w \notin U$. Dann ist wegen $u, w \in U \cup W$ und weil $U \cup W$ ein UVR, nach dem UVR-Kriterium 4.8

$$u + w \in U \cup W.$$

Also $\quad u + w = u_1 \in U \;$ oder $\; u + w = w_1 \in W$.
Im Fall $u + w = u_1 \in U$ ist $w = u_1 - u \in U$, ein Widerspruch!
Im Fall $u + w = w_1 \in W$ ist $u = w_1 - w \in W$, ein Widerspruch!

Also ist die Annahme falsch, es muß also $U \subset W$ oder $W \subset U$ gelten.