MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
3.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wir bestimmen $\det A$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes 3.6. Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist also $\det A = 1 + t^2 \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det A^{(11)} & -\det A^{(21)} & +\det A^{(31)} & -\det A^{(41)} \\ -\det A^{(12)} & +\det A^{(22)} & -\det A^{(32)} & +\det A^{(42)} \\ +\det A^{(13)} & -\det A^{(23)} & +\det A^{(33)} & -\det A^{(43)} \\ -\det A^{(14)} & +\det A^{(24)} & -\det A^{(34)} & +\det A^{(44)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$\begin{aligned}
x_1 \quad &= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^2-1 & 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t^2-1 & -t & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot (t^2+1) = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 \quad &= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t \\ t & 0 & 1 \\ 0 & t^2-1 & -t \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{t}{1+t^2} \cdot \Big(\big(0+0-t^2(t^2-1)\big) - \big(0+(t^2-1)-t^2(t^2+1)\big)\Big) = \\
&= \frac{t}{1+t^2} \cdot \big(-t^4+t^2-t^2+1+t^4+t^2\big) = \frac{t}{1+t^2} \cdot \big(1+t^2\big) = t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 \quad &= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & t^2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t^2-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 \\ t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(0-(t^2+1)\,t\big) = -t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4 \quad &= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & t^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & t^2-1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t & t^2+1 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & -t & t^2-1 \end{vmatrix} = \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \Big(\big((t^2-1)+0-t^2(t^2+1)\big) - \big(0+0-t^2(t^2-1)\big)\Big) = \\
&= \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(t^2-1-t^4-t^2+t^4-t^2\big) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(-1-t^2\big) = -1,
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Man hat die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
A \cdot X = X \cdot A \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad x_1 + x_3 = x_1 + x_2 \\
&\qquad\quad \wedge\ x_2 + x_4 = x_1 + x_2 \\
&\qquad\quad \wedge\ x_1 + x_3 = x_3 + x_4 \\
&\qquad\quad \wedge\ x_2 + x_4 = x_3 + x_4 \\
&\iff \quad -x_2 + x_3 = 0 \\
&\qquad\quad \wedge\ -x_1 + x_4 = 0 \\
&\qquad\quad \wedge\ x_1 - x_4 = 0 \\
&\qquad\quad \wedge\ x_2 - x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir für x_1, x_2, x_3, x_4 das homogene lineare Gleichungssystem $M \cdot x = 0$ mit der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$(M \mid 0) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also können $x_3 = \mu$ und $x_4 = \lambda$ beliebig gewählt werden, und dann ist $x_1 = x_4 = \lambda$ und $x_2 = x_3 = \mu$, so daß

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ist.

b) In a) haben wir im Wesentlichen gezeigt, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ist, so daß nun noch die Beziehung

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

zu beweisen ist. Dafür beweisen wir beide Inklusionen einzeln, wie im ersten Semester gelernt:

„$\subset$“. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \mu \cdot A + (\lambda - \mu) \cdot E_2,$$

also liegt jedes Element der linken Menge in der rechten Menge (nämlich mittels $\alpha := \mu$ und $\beta := \lambda - \mu$).

„$\supset$“. Es gilt

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix},$$

und eine Matrix dieser Form liegt in der linken Menge (nämlich mittels $\mu := \alpha$ und $\lambda := \alpha+\beta$).

3. Ein lineares Gleichungssystem $M \cdot x = b$ mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $M \in GL_n(\mathbb{R})$ ist (siehe auch 3.12); in diesem Fall ist die Lösungsmenge $L = \{M^{-1} \cdot b\}$ einelementig.
Im folgenden umgehen wir das Berechnen von $A_\alpha \cdot A_\alpha^\mathsf{T}$:

   a) Für die in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ berechnen wir die Determinante und führen im ersten Schritt eine ESU (deswegen ist sie unter dem Gleichheitszeichen notiert), die die Determinante nach 3.4. nicht ändert, durch:

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{I–II}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{3.6}{=}} (-1)^{1+1} \cdot \alpha \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \alpha \cdot \big(1 \cdot (-1) \cdot (-1)\big) = \alpha,$$

so daß sich für $B_\alpha = A_\alpha A_\alpha^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ unter Verwendung von 3.3

$$\det(B_\alpha) = \det(A_\alpha \cdot A_\alpha^\mathsf{T}) \overset{3.3a)}{=} \det(A_\alpha) \cdot \underbrace{\det(A_\alpha^\mathsf{T})}_{=\det(A_\alpha)} \overset{3.3d)}{=} (\det(A_\alpha))^2 = \alpha^2$$

ergibt. Damit ist das lineare Gleichungssystem $B_\alpha \cdot x = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(B_\alpha) \neq 0$ ist, also genau im Falle $\alpha \neq 0$.

   b) Auch hier vermeiden wir das Berechnen von $B_1 = A_1 \cdot A_1^\mathsf{T}$. Für $\alpha = 1$ besitzt das lineare Gleichungssystem $B_1 \cdot x = b$ gemäß a) eine eindeutig bestimmte Lösung; dabei gilt

$$B_1 \cdot x = b \iff \big(A_1 \cdot A_1^\mathsf{T}\big) \cdot x = b \iff A_1 \cdot \big(A_1^\mathsf{T} \cdot x\big) = b$$
$$\iff \big(A_1 \cdot y = b \ \text{ und } \ A_1^\mathsf{T} \cdot x = y\big).$$

Wegen

$$(A_1|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{IV}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{II}-\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{IV}-\text{II} \\ \text{III}-\text{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

ist zunächst

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

und für das LGS

$$(A_1^\mathsf{T}|y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

können wir die Lösung von unten nach oben ablesen:

$$\begin{aligned} -x_4 = 2 \quad &\Longrightarrow \quad x_4 = -2 \quad \text{(vierte Zeile der Matrix)} \\ -x_3 - (-2) = 1 &\Longrightarrow \quad x_3 = 1 \quad \text{(dritte Zeile der Matrix)} \\ x_2 + 1 - 2 = -4 &\Longrightarrow \quad x_2 = -3 \quad \text{(zweite Zeile der Matrix)} \\ x_1 + (-3) + 1 + (-2) = 3 &\Longrightarrow \quad x_1 = 7 \quad \text{(erste Zeile der Matrix)} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

als eindeutig bestimmte Lösung des LGS $B_1 \cdot x = b$.

4. a) Es ist

$$\begin{aligned} (-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v &= ((-\lambda) + \lambda)) \cdot v && \text{(Gesetz 4.1 b) i))} \\ &= 0 \cdot v && \text{(gewöhnliches Rechnen in } \mathbb{R} \text{)} \\ &= 0_V && \text{(Rechenregel 4.3 a))} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v &= \lambda \cdot ((-v) + v) && \text{(Gesetz 4.1 b) ii))} \\ &= \lambda \cdot 0_V && \text{(Definition von } -v \text{)} \\ &= 0_V && \text{(Rechenregel 4.3 b))} \end{aligned}$$

b) Die Beziehung $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = 0_V$ bedeutet genau, daß $(-\lambda) \cdot v$ das (eindeutig bestimmte) additive Inverse zu $\lambda \cdot v$ ist, welches als $-(\lambda \cdot v)$ bezeichnet wird. Also ist

$$(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v).$$

Alternativ kann man auch so argumentieren: Es ist

$$\begin{aligned} & & (-\lambda)v + \lambda v &= 0_V \\ &\Longrightarrow & \big((-\lambda)v + \lambda v\big) + (-(\lambda v)) &= 0_V + (-(\lambda v)) \\ &\overset{4.1a)i)}{\Longrightarrow} & (-\lambda)v + \big(\lambda v + (-(\lambda v))\big) &= 0_V + (-(\lambda v)) \\ &\overset{4.1a)iii)}{\Longrightarrow} & (-\lambda)v + 0_V &= 0_V + (-(\lambda v)) \\ &\overset{4.1a)ii)}{\Longrightarrow} & (-\lambda)v &= -(\lambda v) \end{aligned}$$

Ebenso heißt die Beziehung $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = 0_V$ ebenfalls, daß $\lambda \cdot (-v)$ eine weitere Verkleidung dieses (eindeutig bestimmten) additiven Inversen von $\lambda \cdot v$ ist, das, wie gesagt, als $-(\lambda \cdot v)$ bezeichnet wird. Also ist auch

$$\lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v).$$