MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost   L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
26.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wir berechnen die Determinante, indem wir die Matrix A durch geschickte EZUs auf Blockmatrixform bringen, aus der wir dann die Determinante nach 3.8 berechnen können (natürlich sind auch andere Wege denkbar, z.B. unter Verwendung des Deteminantenenwicklungssatzes 3.6; es empfiehlt sich allerdings in jedem Fall, zuerst EZUs oder ESUs durchzuführen, um mehr Nullen herzustellen, was das Entwickeln erleichtert). Bei elementaren Zeilenumformungen müssen wir 3.4 beachten, u.a., daß EZUs vom Typ I das Vorzeichen ändern! Wir schreiben die verwendete EZU jeweils über das Gleichheitszeichen.
Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{V}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{V}-2\,\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-2\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-2\,\mathrm{II}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Block-}}}{\underset{\text{matrix}}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (-1) \cdot (-64 + 4 + 4) = 56.$$

b) Aufgrund von 3.3b) ist

$$\det B = \det\Big(-\frac{1}{2}A\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^5 \cdot \det A = -\frac{1}{32} \cdot 56 = -\frac{7}{4} < -1.$$

c) Angenommen, eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $C^2 = B$ existiert. Dann gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz 3.3a)

$$\det B = \det(C^2) = (\det C)^2 \geq 0,$$

im Widerspruch zu b). Also kann keine solche Matrix C existieren.

2. a) Entwickelt man die Determinante nach der ersten Zeile, so ergibt sich

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} \cdot a,$$

denn die beiden Streichungsmatrizen sind Dreicksmatrizen (eine untere und eine obere), deren Determinante also jeweils einfach das Produkt der Diagonaleinträge und damit 1 ist.

b) Wir numerieren wir die Teilnehmer mit $1, \ldots, n$ durch und nennen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die jeweils von den Teilnehmern gewählten geheimen Zahlen. Der Zauberer bekommt nun die Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_n, \\ s_2 &= x_2 + x_1, \\ s_3 &= x_3 + x_2, \\ &\vdots \\ s_n &= x_n + x_{n-1} \end{aligned}$$

genannt. Um daraus die geheimen Zahlen zu rekonstruieren, möchte Linalgini aus diesem System die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ berechnen. Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & s_1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & s_n \end{array}\right).$$

Wir wissen jedoch aus a), daß die Determinante der Matrix des Gleichungssystems den Wert $d := 1 + (-1)^{n+1} \cdot 1 = 1 + (-1)^{n+1}$ hat. Ist n ungerade, so ist $n+1$ gerade und $d = 1+1 = 2$, so daß die Matrix invertierbar und das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Ist n gerade, so ist $d = 1 + (-1) = 0$, so daß das Gleichungssystem keine eindeutig bestimmte Lösung hat. (Es gibt sicher eine Lösung, nämlich die „richtigen" geheimen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, jedoch zusätzlich viele weitere.) Dies kann man auch an einem konkreten Beispiel sehen: Ist beispielsweise $n = 4$ und $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, so werden dem Zauberer die Summen $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$ genannt. Die gleichen Summen ergeben sich jedoch auch, wenn beispielsweise $x_1 = x_3 = 2$ und $x_2 = x_4 = 0$ ist. Also ist es unmöglich, nur aus den paarweisen Summen die geheimen Zahlen zu rekonstruieren.

Ist n ungerade, so kommt Linalgini sogar ohne die Theorie aus der Linearen Algebra aus: Er muß nur auf die Idee kommen, die sogenannte alternierende Summe

$$s_1 - s_2 + s_3 - \ldots - s_{n-1} + s_n$$

zu bilden. (Daß die letzten beiden Summanden s_{n-1} und s_n mit den angegebenen Vorzeichen erscheinen, ist wesentlich und liegt daran, daß n ungerade ist!) Diese Summe hat nämlich den Wert

$$(x_1 + x_n) - (x_2 + x_1) + (x_3 + x_2) - \ldots - (x_{n-1} + x_{n-2}) + (x_n + x_{n-1}) = 2x_n,$$

so daß Linalgini den Wert x_n berechnen kann und, von ihm ausgehend, der Reihe nach auch alle anderen geheimen Zahlen.

3. a) Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(A_\alpha \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\substack{\text{II}-\text{I}\\ \text{III}-\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\text{III}-\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = (A'_\alpha \mid B'_\alpha).
\end{aligned}
$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix A_α zeilenäquivalente Matrix

$$
A'_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
$$

für $\alpha = 0$ in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für $\alpha = 1$ in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch A_α für $\alpha \in \{0, 1\}$ nicht invertierbar.

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist A'_α auf ZSF ohne Nullzeile, also ist A_α invertierbar, und wir können durch weitere EZUs die Einheitsmatrix E_3 erreichen:

$$
\begin{aligned}
\left(A'_\alpha \mid B'_\alpha\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\substack{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\text{I}\\ \frac{1}{\alpha-1}\cdot\text{II}\\ \frac{1}{\alpha-1}\cdot\text{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\overset{\text{I}-\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\overset{\text{II}-\text{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) = \left(E_3 \mid A_\alpha^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist A_α also genau für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ invertierbar, und für ihre Inverse gilt dann

$$
A_\alpha^{-1} = A'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.
$$

b) Alternativ zu a) läßt sich die Invertierbarkeit der Matrix A_α mit Hilfe ihrer Determinante überprüfen und gegebenenfalls ihre Inverse A_α^{-1} über die zu A_α komplementäre Matrix $\widetilde{A_\alpha}$ berechnen: wegen

$$
\begin{aligned}
\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} &\underset{\text{Sarrus}}{=} \left(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\right) - \left(\alpha^2 + \alpha + \alpha^3\right) \\
&= 2\,\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha\left(\alpha^2 - 2\,\alpha + 1\right) = -\alpha\,(\alpha - 1)^2
\end{aligned}
$$

ist die Matrix A_α genau dann invertierbar, wenn

$$\det(A_\alpha) = -\alpha(\alpha-1)^2 \neq 0, \qquad \text{also} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} A_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(A_\alpha)} \cdot \widetilde{A_\alpha} \\ &= \frac{1}{\det(A_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det A_\alpha^{(11)} & -\det A_\alpha^{(21)} & +\det A_\alpha^{(31)} \\ -\det A_\alpha^{(12)} & +\det A_\alpha^{(22)} & -\det A_\alpha^{(32)} \\ +\det A_\alpha^{(13)} & -\det A_\alpha^{(23)} & +\det A_\alpha^{(33)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\alpha(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Wir berechnen die Determinante, indem wir die Matrix A_t durch geschickte EZUs auf obere Dreiecksform bringen, aus der wir dann die Determinante leicht nach 3.8 ablesen können (natürlich sind auch andere Wege denkbar, z.B. unter Verwendung des Deteminantenenwicklungssatzes 3.6). Bei elementaren Zeilenumformungen müssen wir 3.4 beachten, u.a., daß EZUs vom Typ I das Vorzeichen ändern! Wir schreiben die verwendete EZU jeweils über das Gleichheitszeichen.
Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ t & t & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ t & 1 & t & 1 \\ t & t & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & t & t & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{II}-t\,\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-t\,\mathrm{III}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t & t-t^2 & 1-t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t & t-t^2 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Dreiecks–} \\ \text{matrix}}}{=} 1 \cdot (1-t) \cdot (1-t) \cdot (1-t) = (1-t)^3;$$

damit ist A_t genau dann invertierbar, wenn $(1-t)^3 \neq 0$ gilt, also für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. In diesen Fällen gilt nach 3.3

$$\det\left(A_t^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A_t)} = \frac{1}{(1-t)^3}.$$

Im Fall $t = 0$ ist also A_0 invertierbar mit

$$\det A_0 = 1,$$

also gilt mit der Komplementärmatrix $\widetilde{A_0}$, daß

$$A_0^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A_0} = \widetilde{A_0}.$$

Es ist nun

$$\widetilde{A_0} = \begin{pmatrix} +\det A_0^{(11)} & -\det A_0^{(21)} & +\det A_0^{(31)} & -\det A_0^{(41)} \\ -\det A_0^{(12)} & +\det A_0^{(22)} & -\det A_0^{(32)} & +\det A_0^{(42)} \\ +\det A_0^{(13)} & -\det A_0^{(23)} & +\det A_0^{(33)} & -\det A_0^{(43)} \\ -\det A_0^{(14)} & +\det A_0^{(24)} & -\det A_0^{(34)} & +\det A_0^{(44)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Weil A_0 symmetrisch ist, muß nach 2.25 auch A_0^{-1} symmetrisch sein; also würde es reichen, bei $\widetilde{A_0}$ nur die Diagonale und die Zahlen darüber zu berechnen.)