MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
19.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Wir bringen A zuerst mit EZUs auf Zeilenstufenform und stellen dann mittels ESUs die Äquivalenznormalform her; dabei notieren wir ESU mit dem Pfeil $\hookrightarrow$ und schreiben die durchgeführte Spaltenumformung dann **unter** den Pfeil. Jede jede elemantare **Zeilen**umformung entspricht der Multiplikation mit einer Elementarmatrix $F_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ <u>von links</u>, und jede elemantare **Spalten**umformung der Multiplikation mit einer Elementarmatrix $G_i \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ <u>von rechts</u>. Wir notieren dies gleich über bzw. unter der jeweiligen durchgeführten Umformung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_1\cdot}{\underset{\curvearrowright}{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_2\cdot}{\underset{\curvearrowright}{\mathrm{III}+3\,\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3\cdot}{\underset{\curvearrowright}{\mathrm{III}-\mathrm{II}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ZSF hergestellt! jetzt mit ESUs weiter zur Äquivalenznormalform}$$

$$\underset{\substack{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{I} \\ \cdot G_1}}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \cdot G_2}}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{III} \\ \cdot G_3}}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III} \\ \cdot G_4}}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III} \\ \cdot G_5}}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{A} \quad \text{Äquivalenznormalform erreicht!}$$

Aus der ZSF sehen wir insbesondere schon, wie die Äquivalenznormalform ausschauen muß, nämlich so:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also mit genau 2 Einsen, d.h. der Einheitsmatrix E_2 im linken oberen Eck.
Damit ist

$$\overline{A} = F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot \ldots \cdot G_5 \;=\; F \cdot A \cdot G$$

für

$$F = F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Es ist

$$(A_s|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II}-s^2\,\text{I} \\ \text{III}-s\cdot\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s-s^4 & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array}\right) = (A'_s \mid B'_s).$$

[Die ZSF hängt von s ab, also hier noch keine Treppe einzeichnen!]
Dies motiviert folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $s \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Dann ist $1 - s^3 \neq 0$.
Wir haben also eine ZFS von A_s <u>ohne</u> Nullzeile, also ist gemäß 2.22 A_s invertierbar. Es ist dann weiter

$$(A'_s \mid B'_s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s(1-s^3) & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{1}{1-s^3}\,\text{II} \\ \frac{1}{1-s^3}\,\text{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{II}-s\,\text{III} \\ \text{I}-s^2\,\text{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & 0 & \frac{1}{1-s^3} & 0 & -\frac{s^2}{1-s^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{I}-s\,\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right) = (E_3 \mid A_s^{-1}).$$

Damit ist A_s invertierbar mit

$$A_s^{-1} = \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $s = 1$. Dann ist $1 - s^3 = 0$.
Also ist

$$(A'_1 \mid B'_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \qquad \text{ZSF } \underline{\text{mit}} \text{ Nullzeile(n), also ist } A_1 \text{ nicht invertierbar.}$$

b) Für $s \neq 1$ ist A_s nach a) invertierbar; damit besitzt das lineare Gleichungssystem $A_s \cdot x = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{aligned} x = A_s^{-1} \cdot b &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist

$$L_s = \left\{ \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_s|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems. Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit ist

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.

3. a) Da die Methoden offengelassen sind, anstelle einer Musterrechnung nur die Zahlenwerte zur Kontrolle: Es ist $\det A = -39$, $\det B = -15$, $\det C = -1$.

   b) Es ist mit 3.3 (Rechenregeln für Determinanten)

$$\begin{aligned} \det(2A) &= 2^3 \cdot \det(A) = -312 \\ \det(A^2) &= \det(A)^2 = (-39)^2 = 1521 \\ \det(B^{-1} \cdot C) &= \det(B^{-1}) \cdot \det(C) = \frac{1}{\det B} \cdot \det(C) = \frac{1}{-15} \cdot (-1) = \frac{1}{15} \\ \det(B+C) &= -17 \qquad \text{[Man beachte, daß es für } \det(B+C) \text{ keine Rechenregel gibt!]} \end{aligned}$$

4. a) Eine Möglichkeit ist es, in der Matrix A den sich aus $a+b+c=0$ ergebenden Ausdruck $c = -a-b$ für c einzusetzen und direkt nachzurechnen, daß

$$\det \begin{pmatrix} a & -a-b & b \\ b & a & -a-b \\ -a-b & b & a \end{pmatrix} = 0$$

ist. Eleganter ist jedoch das folgende Verfahren: Daß $a+b+c=0$ ist, bedeutet genau, daß

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist. Damit kann aber A nicht mehr invertierbar sein, denn sonst hätte die Gleichung $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.

Eine andere sehr schöne Beweismethode verwendet EZUs: Es ist

$$A \overset{\substack{\mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die letzte Matrix wegen ihrer Nullzeile nicht invertierbar ist, ist nach 2.24a) auch A nicht invertierbar.

b) Beispielsweise mit der Regel von Sarrus erhält man

$$\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Ist nun $\det A = 0$ und $a = 0$, so folgt $b^3 + c^3 = 0$, also $c^3 = -b^3 = (-b)^3$ und damit $c = -b$, also $a + b + c = 0 + b + (-b) = 0$.

c) Nein, beispielsweise für $a = b = c = 1$ ist die Matrix A sicherlich nicht invertierbar (sie hat lauter gleiche Zeilen), ohne daß $a + b + c = 0$ gilt.

Vergleicht man die Determinante aus b) mit der Aussage aus a), so ergibt sich: Der Ausdruck $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ verschwindet, wenn $a + b + c = 0$ ist. Dies ist nicht nur auf den ersten Blick überraschend; wenn man aber weiß, daß

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

gilt, so wird es erklärlich. Allerdings ist diese Produktzerlegung wiederum selbst etwas rätselhaft – wer kann ihre Herkunft erklären?