MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
5.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Da f eine Polynomfunktion zweiten Grades sein soll, ist

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Die Punkte P_1, P_2, P_3 liegen genau dann auf dem Graphen G_f von f, wenn gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c &&= 1 \\ f(2) &= 4a + 2b + c &&= 0 \\ f(-3) &= 9a - 3b + c &&= -7. \end{aligned}$$

Dies ist ein LGS in den Variablen a, b, c, welches wir mit Hilfe des Gausschen Algorithmus lösen. Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{III}-9\text{I} \\ \text{II}-4\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -12 & -8 & -16 \end{array}\right) \overset{\text{III}-6\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{array}\right).$$

Folglich ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Auflösen „von unten her“ liefert

$$\begin{aligned} & & c &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ -2b - 3 \cdot \frac{4}{5} = -4 &\Longrightarrow & b &= 2 - 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \\ a + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 1 &\Longrightarrow & a &= 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich für f die Funktionsvorschrift

$$f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III} + \mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I} - 4\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Jede elementaren Zeilenumformungen (EZU) entspricht nach 2.13 der Multiplikation mit einer Elementarmatrix $F_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von links; insbesondere ist ...

$$\text{die 1. EZU die Multiplikation mit} \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{die 2. EZU die Multiplikation mit} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{die 3. EZU die Multiplikation mit} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{die 4. EZU die Multiplikation mit} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$A' = \underbrace{F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1}_{=:F} \cdot A,$$

mit

$$\begin{aligned} F &= F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit diesem F ist in der Tat (die „Probe“ ist nicht nötig)

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'. \qquad \checkmark$$

3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir formen zunächst die Gleichung $A_\alpha x = B_\alpha x$ zu einem homogenen LGS um. Für $x \in \mathbb{R}^3$ ist

$$A_\alpha x = B_\alpha x \quad \Longleftrightarrow \quad A_\alpha x - B_\alpha x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(A_\alpha - B_\alpha)}_{=:C_\alpha} \cdot x = 0$$

mit

$$C_\alpha = A_\alpha - B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 3\alpha & 7 & 3\alpha \\ 0 & -3 & 2\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & -5\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 7+5\alpha & 2\alpha \\ -\alpha & -3-2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sei $L_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge des LGS $C_\alpha x = 0$. Für alle $x \in L_\alpha$ ist dann $A_\alpha x = B_\alpha x$.
Wir ermitteln L_α mit Hilfe des Gausschen Algorithmus:

$$(C_\alpha \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 7+5\alpha & 2\alpha & 0 \\ -\alpha & -3-2\alpha & 2\alpha & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5+5\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & -2-2\alpha & 2\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+\frac{2}{5}\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5+5\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5}\alpha & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{5}{14}\cdot\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5+5\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right) =: (C'_\alpha \mid 0).$$

Dies motiviert folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $\alpha = 0$. Dann ist

$$(C'_0 \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-5\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lösen von unten nach oben und erhalten

$$x_3 = \lambda \text{ frei}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \mu \text{ frei},$$

also

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Fall: $\alpha = -1$. Dann ist

$$(C'_{-1} \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lösen von unten nach oben und erhalten

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \lambda \text{ frei}, \quad x_1 = \lambda,$$

also

$$L_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Fall: $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. Dann ist

$$(C'_\alpha \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5+5\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

Dieses LGS ist eindeutig lösbar mit

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0,$$

also

$$L_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}.$$

Zusammenfassend erhalten wir also für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$A_\alpha x = B_\alpha x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 & \text{im Fall } \alpha = 0 \\ x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 = x_2 & \text{im Fall } \alpha = -1 \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0 & \text{im Fall } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}\ . \end{cases}$$

4. Seien $b, c \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$A^2 = E_2 \quad \Longleftrightarrow \quad b \cdot c = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b, c \neq 0 \ \wedge \ b = \frac{1}{c}.$$

Damit gilt für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig, daß $A^2 = E_2$. Also gibt es unendlich viele Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = E_2$.