MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
29.10.2018

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Für das in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$(G_t) \qquad \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 3\,z & = & 3 \\ -2\,x & - & t\,y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2\,y & + & t\,z & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_t \mid b)$ und erhalten

$$(A_t \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -t & 1 & 2 \\ 1 & 2 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -t & -5 & -4 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & -t & -5 & -4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\frac{t}{2}\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2}(t+3)-5 & 2\,t-4 \end{array}\right) = (A'_t \mid b'_t),$$

wodurch wegen

$$\frac{t}{2}(t+3)-5 = \frac{t\cdot(t+3)-10}{2} = \frac{t^2+3\,t-10}{2} = \frac{(t+5)\cdot(t-2)}{2}$$

die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

**1. Fall:** $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$, also $\frac{(t+5)\cdot(t-2)}{2} \neq 0$.
Dann ist

$$(A'_t \mid b'_t) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{(t+5)\cdot(t-2)}{2} & 2t-4 \end{array}\right),$$

also ist das LGS $(G_t)$ lösbar ohne freie Variable, also eindeutig lösbar. Wir lösen von unten nach oben und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{(t+5)\cdot(t-2)}{2}\cdot z = 2(t-2) &\Longrightarrow \quad z = \frac{4}{t+5} \\ 2y + (t+3)\frac{4}{t+5} = 4 &\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left(4-(t+3)\cdot\frac{4}{t+5}\right) = \frac{4}{2}\cdot\frac{(t+5)-(t+3)}{t+5} = \frac{4}{t+5} \\ -x + 3\frac{4}{t+5} = 3 &\Longrightarrow \quad x = -3 + 3\cdot\frac{4}{t+5} = -3\cdot\frac{(t+5)-4}{t+5} = \frac{-3(t+1)}{t+5}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich in diesen Fällen die jeweils einelementige Lösungsmenge

$$L_t = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3(t+1)}{t+5} \\ \frac{4}{t+5} \\ \frac{4}{t+5} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{t+5} \cdot \begin{pmatrix} -3(t+1) \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-5, 2\}.$$

**2. Fall:** $t = -5$.
Dann ist

$$(A'_{-5} \mid b'_{-5}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right), \quad \Big\}\text{Hier steht „rechts“ keine } 0$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem $(G_{-5})$ nicht lösbar, also $L_{-5} = \varnothing$.
**3. Fall:** $t = 2$.
Dann ist

$$(A'_2 \mid b'_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \Big\}\text{ Hier steht auch „rechts“ eine } 0$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem $(G_2)$ lösbar mit einer freien Variablen ($z = \lambda$ frei), also $|L_2| = \infty$. Auflösen „von unten her“ liefert

$$\begin{aligned} & & z &= \lambda \\ 2y + 5\lambda = 4 &\Longrightarrow & y &= 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ -x + 3\lambda = 3 &\Longrightarrow & x &= -3 + 3\lambda. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich in diesem Fall die Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + 3\,\lambda \\ 2 - \frac{5}{2}\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem in den $n$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ mit den $n$ Gleichungen

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=k+1}^{n} x_j = 1 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n-1 & \text{(Gleichung 1 bis } n-1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \text{(Gleichung } n) \end{cases}$$

zu betrachten; es besitzt damit die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & -1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}.$$

Durch EZUs stellen wir eine Zeilenstufenform von $A$ her, indem wir zuerst die 1. Zeile von der 2., 3., u.s.w. bis n-ten Zeile subtrahieren, anschließend die 2. Zeile von der 3., 4. u.s.w. bis n-ten Zeile, und so fortfahren, bis wir im letzten Schritt die n-1-te Zeile von der n-ten Zeile abziehen, und so die Zeilenstufenform $A'$ erhalten:

$$(A \mid b) \overset{\substack{\vdots \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\vdots \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\vdots}{\curvearrowright} \cdots \curvearrowright \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid b')$$

Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung (es gibt keine freien Variablen), und man erhält durch Auflösen von unten nach oben $x_n = x_{n-1} = x_{n-2} = \ldots = x_2 = 0$, $x_1 = 1$, also ist die Lösungsmenge $L = \{e_1\}$, wobei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

3. Ein Produkt $P \cdot Q$ zweier Matrizen läßt sich dann bilden, wenn die Spaltenzahl von $P$ identisch mit der Zeilenzahl von $Q$ ist (und das Produkt erbt dann die Zeilenzahl von $P$ und die Spaltenzahl von $Q$). Damit ergeben sich die sechs möglichen Produkte:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 & 17 \\ 7 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -6 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 & 5 \\ -11 & -1 & 4 & -12 \\ 14 & -3 & -5 & 13 \end{pmatrix}, \quad C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 14 & -5 & -7 \\ -5 & 14 & 1 \\ -7 & 1 & 14 \end{pmatrix}, \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. • Geduldiges Rechnen liefert

$$A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -15 \\ 6 & 7 & -5 \\ 30 & 30 & -24 \end{pmatrix},$$

d.h. es ist $A^2 = A$. (So etwas passiert mit Zahlen, außer mit 0 und 1, nicht – mit Matrizen kann es jedoch oft vorkommen!) Dann ist aber zu erwarten, daß $A^r = A$ für *alle* $r \geq 1$ gilt.

Dies kann man mit vollständiger Induktion nach $r$ beweisen: Der Fall $r = 1$ ist klar. Für den Induktionsschluß $r \to r + 1$ (für $r \geq 1$) genügt nun die Beobachtung

$$A^{r+1} = A^r \cdot A \overset{\text{Ind.voraussetzung}}{=} A \cdot A \overset{\text{Rechnung oben}}{=} A.$$

- Ebenso fleißiges Rechnen ergibt

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist noch nichts Interessantes zu erkennen, also rechnen wir frohgemut weiter:

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: O \quad (= \text{Nullmatrix}).$$

Damit kann man nun etwas anfangen, denn es ist zu erwarten, da dann $B^r = O$ für alle $r \geq 3$ ist. Das ist so gut wie klar; wer ganz genau ist, beweist es z.B. ebenfalls mit vollständiger Induktion: Der Induktionsanfang $r = 3$ steht schon da; für den Induktionsschluß $r \to r + 1$ (für $r \geq 3$) rechnet man

$$B^{r+1} = B^r \cdot B \overset{\text{Ind.voraussetzung}}{=} O \cdot B = O.$$

- Routiniertes Rechnen ergibt

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und, weil man bislang noch nichts Interessantes erkennen konnte,

$$C^3 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet aber $C^3 = -E_3$, und damit können wir die nächsten Potenzen leicht berechnen:

$$C^4 = C^3 \cdot C = -E_3 \cdot C = -C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C^5 = C^4 \cdot C = -C \cdot C = -C^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C^6 = C^5 \cdot C = -C^2 \cdot C = -C^3 = -(-E_3) = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist aber $C^7 = C^6 \cdot C = E_3 \cdot C = C$ usw. und allgemein $C^{r+6} = C^r \cdot C^6 = C^r \cdot E_3 = C^r$

für alle $r \geq 1$. Man erhält also, indem man $r$ als $6k+i$ mit $i \in \{0,\dots,5\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ schreibt,

$$\begin{aligned}
C^{6k} &= E_3,\\
C^{6k+1} &= C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\\
C^{6k+2} &= C^2 = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\\
C^{6k+3} &= C^3 = -E_3,\\
C^{6k+4} &= C^4 = -C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\\
C^{6k+5} &= C^5 = -C^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3\\ -2 & 4 & -1\\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.