MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 13
28.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Im Hinblick auf b) betrachten wir gleich die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$. Es ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 9 & t \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{1}{3}\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 & t-8 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{IV}+3\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+2\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & t-2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-6 \end{array}\right) =: (A' \mid b')$$

Hieraus sieht man

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 3,$$

also ist

$$\dim L_0 = 5 - \mathrm{Rang}(A) = 5 - 3 = 2.$$

Beim Lösen des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ haben wir mit

$$(A \mid 0) \curvearrowright \ldots \text{ s.o. } \ldots \curvearrowright (A' \mid 0)$$

die Variablen x_3 und x_5 frei. Wählen wir also z.B.

$x_3 = 0, \; x_5 = 1,$ so erhalten wir als einen Lösungsvektor $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

und bei

$x_3 = 1, \; x_5 = 0$ erhalten wir als einen Lösungsvektor $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

v_1, v_2 sind durch diese Wahl von x_3 und x_5 automatisch linear unabhängig, bilden also wegen $\dim L_0 = 2$ eine Basis von L_0.

b) Das LGS $Ax = b$ ist lösbar, genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$, was wegen $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A)$ und $\mathrm{Rang}(A \mid b) = \mathrm{Rang}(A' \mid b')$ genau dann der Fall ist, wenn

$$t - 6 = 0, \qquad \text{also} \quad t = 6.$$

Eine partikuläre Lösung $x_p \in L$ erhalten wir aus $(A' \mid b')$ im Fall $t = 6$, also aus

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

indem wir z.B. wählen $x_3 = x_5 = 0$. Dann ergibt sich

$$x_p = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wegen $L = x_p + L_0$ ist also

$$L = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Für $c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\operatorname{Rang} C = n \iff C \text{ invertierbar} \iff \det C \neq 0.$$

Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes 3.3 bekommen wir nun:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Rang}(A \cdot B) = n. \\ \iff & \det(A \cdot B) \neq 0 \\ \overset{3.3}{\iff} & \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \\ \iff & \det A \neq 0 \text{ und } \det B \neq 0 \\ \iff & \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = n \qquad \checkmark \end{aligned}$$

b) Für z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \operatorname{Rang}(A \cdot B) = 0,$$

und

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \operatorname{Rang}(B \cdot A) = 1.$$

Also ist hier $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \neq \operatorname{Rang}(B \cdot A)$.

c) i) Nicht möglich!
Nach a) würde aus $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 3$ folgen, daß $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 3$. Nach Vorgabe soll aber $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 2$ sein!

ii) Möglich! Wähle z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$. Dann ist $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 2$ und $A \cdot B = A$, also auch $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 2$.

iii) Möglich! Wähle z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. Dann ist $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 2$ und

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 1$.

iv) Nicht möglich!
Annahme: Es gibt Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = 2$, so daß gilt $\text{Rang}(A\cdot B) = 0$.
Dann ist also $A \cdot B = O$ (Nullmatrix), also gilt

$$(A\cdot B)\cdot x \;=\; A\cdot(B\cdot x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3. \qquad (*)$$

Sei nun $L_0 \subset \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ay = 0$. Dann gilt also wegen $(*)$, daß $B\cdot x \in L_0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
Mit $B = (b_1\ b_2\ b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist also $b_i = B\cdot e_i \in L_0$ für $i = 1,2,3$. Dabei bezeichne $e_i \in \mathbb{R}^3$ der $i-$ten Einheitsvektor. Also ist

$$\langle b_1, b_2, b_3\rangle \subset L_0.$$

Damit ist

$$\dim\langle b_1, b_2, b_3\rangle \le \dim L_0 = 3 - \text{Rang}\, A = 3 - 2 = 1,$$

also $\dim\langle b_1, b_2, b_3\rangle \le 1$, ein Widerspruch zu $\dim\langle b_1, b_2, b_3\rangle = \text{Rang}\, B = 2$.

3. Wir klären zuerst mit Hilfe der Determinante die Invertierbarkeit von A_t. Da A_t aber als Produkt zweier Dreiecksmatrizen gegeben ist, deren Determinante ja besonders einfach zu berechnen ist, empfiehlt es sich, das Matrixprodukt nicht zuerst zu berechnen, sondern den Determinantenmultiplikationssatz 3.3 zu verwenden:

$$\det A_t = \det\begin{pmatrix} t & 1 & t\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} t & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ t & 1 & 1\end{pmatrix} = t\cdot t = t^2.$$

Damit ist A_t für $t \ne 0$ invertierbar und hat damit den Rang 3.

Für $t = 0$ dagegen ergibt sich

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Hier erkennt man, daß $\text{Rang}(A_0) = 2$ ist, denn er ist ≥ 2, weil nicht alle Zeilen (oder Spalten) Vielfache voneinander sind, und er ist < 3, weil die Matrix nachweislich nicht invertierbar ist (oder, für Scharfblickende: weil die mittlere Zeile/Spalte die Summe der beiden äußeren ist).
Natürlich zeigt auch eine Umformung von A_0 auf ZSF

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{\text{III}-\text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

daß $\text{Rang}(A) = 2$.

4. Anstatt die Determinante zu berechnen und zu faktorisieren (was selbstverständlich auch möglich wäre: es ergibt sich die Determinante $\frac{1}{2}a^4 - 4a^2 + 8 = \frac{1}{2}(a^4 - 8a^2 + 16) = \frac{1}{2}(a^2-4)^2$), arbeiten wir diesmal mit elementaren Zeilenumformungen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha\\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2\\ -2\alpha & -\frac{3}{2}\alpha & -2\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{III}+\frac{\alpha}{2}\text{I}\\ \text{II}-\frac{\alpha^2}{4}\text{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha\\ 0 & \frac{1}{4}\alpha^2 - 1 & 2 - \frac{1}{4}\alpha^3\\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{2}\alpha^2\end{pmatrix} \overset{\substack{2\cdot\text{III}\\ 4\cdot\text{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha\\ 0 & \alpha^2 - 4 & 8 - \alpha^3\\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4\end{pmatrix} =: A'.$$

Wir treffen nun die folgende Fallunterscheidung:

1. Fall $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$.
Dann ist $\alpha^2 - 4 \neq 0$, also $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 3$ und damit $\dim U = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 3 - 3 = 0$ (in diesem Fall ist A ja auch invertierbar).

2. Fall $\alpha = -2$.
Dann ist $\alpha^2 - 4 = 0$ und $8 - \alpha^3 = 16 \neq 0$, also

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 2$ und damit $\dim U = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 3 - 2 = 1$.

3. Fall $\alpha = 2$.
Dann ist $\alpha^2 - 4 = 0$ und $8 - \alpha^3 = 0$, also

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 1$ und damit $\dim U = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 3 - 1 = 2$.