MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
21.1.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) zu $U$:
Es ist $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Wir untersuchen $u_1, u_2, u_3$ auf lineare Unabhängigkeit, bilden dazu die Matrix
$$A := (u_1\ u_2\ u_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$
und bringen diese auf Zeilenstufenform (wir lösen damit das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$). Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $u_3 \in \langle u_1, u_2 \rangle$, also $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, und $u_1, u_2$ linear unabhängig. Also ist $u_1, u_2$ eine Basis von $U$ und $\dim U = 2$.

zu $W$:
Es ist $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid B \cdot x = 0\}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

also ist $W$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $B \cdot x = 0$. Es ist

$$(B \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right),$$

also haben wir $x_4 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ frei, und damit ist

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\mu - 10\lambda \\ \mu - 7\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von $W$ und es ist also $\dim W = 2$.

b) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn er sowohl Linearkombination von $u_1, u_2$ als auch Linearkombination von $w_1, w_2$ ist. Also

$$\begin{aligned} x \in U \cap W \iff & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = x = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 \\ \iff & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_1(-w_1) + \mu_2(-w_2) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{und} \quad x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \end{aligned}$$

Wir lösen also das homogene LGS, gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{IV}-2\,\text{II} \\ \text{III}-\text{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{IV}+\text{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Man erhält durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei} \\ \mu_1 &= 9\alpha \\ \lambda_2 &= \alpha \\ \lambda_1 &= 9\alpha; \end{aligned}$$

also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\alpha \\ \alpha \\ 9\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x \in U \cap W \quad \iff \quad x &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 9\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(9u_1 + u_2) \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $\dim(U \cap W) = 1$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $U \cap W$.

c) Nach b) ist $v := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap W$. Wir ergänzen $v$ mit $u_1$ zu einer Basis $v, u_1$ von $U$ (es ist $\dim U = 2$ und $v, u_1$ l.u.), und mit $w_1$ zu einer Basis $v, w_1$ von $W$ (es ist $\dim W = 2$ und $v, w_1$ l.u.). Nach (5.20) ist dann

$$v, u_1, w_1, \qquad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U + W$.

2. a) Für $V = \mathbb{R}^5$ und Untervektorräume $W_1$ und $W_2$ von $V$ der Dimensionen $\dim W_1 = 3$ und $\dim W_2 = 3$ gilt wegen $W_1 \cap W_2 \subset W_1$ zum einen

$$\dim (W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = 3$$

sowie wegen $W_1 + W_2 \subset V$ zum anderen

$$\dim (W_1 + W_2) \leq \dim V = 5,$$

so daß sich unter Verwendung der Dimensionsformel dann

$$\dim (W_1 \cap W_2) = \underbrace{\dim W_1}_{=3} + \underbrace{\dim W_2}_{=3} - \underbrace{\dim (W_1 + W_2)}_{\leq 5} \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

ergibt. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim (W_1 \cap W_2) \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

und haben diese drei möglichen Werte noch (mit $V = \mathbb{R}^5$) zu belegen:

- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_3 \rangle$, also $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$, also $\dim (W_1 \cap W_2) = 2$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, also haben wir $\dim (W_1 \cap W_2) = 3$.

b) Wir bestimmen $\dim U$ und untersuchen dazu

$$p_1 := 1 + x + x^2, \;\; p_2 := x + x^2 + x^3, \;\; p_3 := x^2 + x^3 + x^4$$

auf lineare Unabhängigkeit.
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\iff \lambda_1 \cdot (1 + x + x^2) + \lambda_2 \cdot (x + x^2 + x^3) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x^3 + x^4) = 0 \\
&\iff \lambda_1 \cdot 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^3 + \lambda_3 \cdot x^4 = 0 \\
&\overset{1,x,x^2,x^3,x^4 \text{ l.u.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Also sind $p_1, p_2, p_3$ linear unabhängig, und wegen $U = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ eine Basis von $U$, also ist $\dim U = 3$.
Ist nun ein UVR $W \subset V$ ein Komplement von $U$ in $V$, so gilt nach 5.24 b)

$$\dim U + \dim W = \dim V = 5.$$

Mit $\dim U = 3$ ist also $\dim W = 2$.
Der Beweis von 5.25 a) zeigt, wie wir ein Komplement $W$ bekommen können: Wir ergäzen $p_1, p_2, p_3$ durch geeignete $p_4, p_5 \in V$ zu einer Basis

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \quad \text{von} \quad V,$$

und setzen $W := \langle p_4, p_5 \rangle$.
Wir können $p_4$ und $p_5$ nach 5.14 aus der Basis $1, x, x^2, x^3, x^4$ wählen und probieren es mit $x^3$ und $x^4$. Wir müssen dann zeigen, daß

$$p_1, p_2, p_3, x^3, x^4 \quad \text{l.u.} \quad .$$

Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, l_4, l_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4 = 0$.

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 \cdot (1 + x + x^2) + \lambda_2 \cdot (x + x^2 + x^3) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x^3 + x^4) + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1 \cdot 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot x^3 + (\lambda_3 + \lambda_5) \cdot x^4 = 0$$
$$\overset{1,x,x^2,x^3,x^4 \text{ l.u.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & & & & & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & & & \lambda_5 & = & 0 \end{array} \right\}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0.$$

Also sind $p_1, p_2, p_3, x^3, x^4$ linear unabhängig.

3. a) Das ist einfach die Dimensionsformel: Es ist

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) \overset{\text{Voraussetzung}}{=} \dim(V).$$

b) "*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*": Nach der Definition 5.23 ist nur zu zeigen, daß $U \cap W = \{0\}$. Nach a) ist

$$\dim(U \cap W) \overset{a)}{=} \dim V - \dim(U + W) \overset{i)}{=} \dim V - \dim V = 0,$$

also $U \cap W = \{0\}$.
"*ii)* $\Longrightarrow$ *iii)*": Folgt sofort aus der Definition 5.23.
"*iii)* $\Longrightarrow$ *i)*": Wegen a) ist

$$\dim(U + W) \overset{a)}{=} \dim V - \dim(U \cap W) \overset{iii)}{=} \dim V - 0 = \dim V.$$

Wegen $U + W \subset V$ folgt damit aus 5.16 b) (ineinanderliegende Vektorräume gleicher endlicher Dimension sind gleich), daß

$$U + W = V.$$

4. Hier ein ausgefülltes Formular:

> **<u>Satz</u>** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $U, W \subset V$ Untervektorräume <u>mit $U \cap W = \{0\}$</u> (aber $U, W \neq \{0\}$). Dann gilt
>
> $$\dim(U+W) = \dim U + \dim W \qquad (= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)).$$

**Beweis.** Es sei

$$\begin{array}{rl} u_1, \ldots, u_r & \text{eine Basis von } U, \\ w_1, \ldots, w_s & \text{eine Basis von } W. \end{array}$$

**Behauptung:** Dann ist $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ eine Basis von $U + W$.
*(Warum genügt es, diese Behauptung zu beweisen?)*

*Erzeugendensystem:* Es gilt

$$\begin{aligned} U + W &= \left\langle \underline{u_1, \ldots, u_r} \right\rangle + \left\langle \underline{w_1, \ldots, w_s} \right\rangle \\ &= \left\langle \underline{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s} \right\rangle, \end{aligned}$$

also erzeugen die Vektoren den Untervektorraum $U + W$.

*Lineare Unabhängigkeit:* Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_r, \tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r + \tau_1 w_1 + \ldots + \tau_s w_s = 0. \qquad (*)$$

Zu zeigen ist $\underline{\mu_1 = ... = \mu_r = \tau_1 = ... = \tau_s = 0}$.
Aus $(*)$ folgt

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = \underline{-\tau_1 w_1 - \ldots - \tau_s w_s}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung liegt im Untervektorraum $\underline{U}$, die rechte im Untervektorraum $\underline{W}$. Der gemeinsame Wert (beide Seiten sind ja gleich!) liegt also im Untervektorraum $\underline{U \cap W} = \{0\}$.

Also gilt $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0$ und ebenso $\underline{-\tau_1 w_1 - \ldots - \tau_r w_r} = 0$.

Wegen <u>der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_r$</u> folgt daraus $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Ebenso

folgt aber $\underline{\tau_1 = \ldots = \tau_s = 0}$, und damit ist die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ bewiesen.