MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
14.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Es ist $U_a = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subset \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^5$$

Um zu sehen, ob $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängig sind, stellen wir die Vektoren zu einer Matrix

$$A_a := (v_1\ v_2\ v_3\ v_4) \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

zusammen und bringen diese auf Zeilenstufenform (wir lösen damit das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$). Es ist

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{V}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{2}{3}\cdot\mathrm{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{V}+(a-1)\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{V}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sehen wir:
Für $a \neq 0$ hat die ZSF lauter einfache Stufenbreiten (und die Treppe beginnt ganz links oben), also sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig, bilden also eine Basis von U_a. Es ist also

$$\dim U_a = 4.$$

Für $a = 0$ hat die ZSF eine breitere Stufe; es ist dann $v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, also $U_0 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$; ferner sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, bilden also eine Basis von U_0. Es ist also

$$\dim U_0 = 3.$$

b) Für $a = 0$ sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 gemäß a) linear unabhängig und können nach dem Basisergänzungssatz durch zwei Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ ergänzt werden. Gemäß 5.14 können wir dazu zwei Vektoren der Standardbasis wählen. Wir versuchen es mit e_3 und e_5. Um zu zeigen, daß die 5 Vektoren v_1, v_2, v_3, e_3, e_5 eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden, stellen wir sie zu einer Matrix

$$B := (v_1\ v_2\ v_3\ e_3\ e_5) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

zusammen und berechnen die Determinante: Es ist

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{5. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{5+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (-1)\big(-1-2\big) = 3 \neq 0$$

Damit ist B invertierbar, also bilden ihre Spalten v_1, v_2, v_3, e_3, e_5 eine Basis von $\mathbb{R}^5$.

2. <u>ohne 5.4; direktes Rechnen in V</u>
Es ist $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, und damit bilden u_1, u_2, u_3 ein Erzeugendensystem von U. Wir untersuchen, ob u_1, u_2, u_3 linear unabhängig.
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \\
&\iff \lambda_1 \cdot (v_1 + v_2) + \lambda_2 \cdot (v_2 + v_3) + \lambda_3 \cdot (v_3 + v_4) = 0 \\
&\iff \lambda_1 v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) v_3 + \lambda_3 v_4 = 0 \\
&\overset{v_1,v_2,v_3,v_4 \text{ l.u.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieses homogene LGS hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also sind u_1, u_2, u_3 linear unabhängig, und damit auch eine Basis von U, also $\dim U = 3$.

Es ist $W = \langle w_1, w_2\rangle$, und damit bilden w_1, w_2 ein Erzeugendensystem von W. Wir untersuchen, ob w_1, w_2 linear unabhängig.
Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0 \\
&\iff \lambda_1 \cdot (v_1 - v_2) + \lambda_2 \cdot (v_2 - v_3) = 0 \\
&\iff \lambda_1 v_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + (-\lambda_2) v_3 = 0 \\
&\overset{v_1,v_2,v_3 \text{ l.u.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & -\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieses homogene LGS hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also sind w_1, w_2 linear unabhängig, und damit auch eine Basis von W, also $\dim W = 2$.

Wir bestimmen nun $U \cap W$:
Ein Vektor $v \in V$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn er sowohl Linearkombination

von u_1, u_2, u_3 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist. Also

$$\begin{aligned} v \in U \cap W &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 u_3 = v = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 \\ &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \mu_1(-w_1) + \mu_2(-w_2) = 0 \\ &\qquad\qquad \text{und} \quad v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \mu_1(-w_1) + \mu_2(-w_2) = 0 \\ \iff &\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2 \cdot (v_2 + v_3) + \lambda_3 \cdot (v_3 + v_4) + \mu_1 \cdot (v_2 - v_1) + \mu_2 \cdot (v_3 - v_2) = 0 \\ \iff &(\lambda_1 - \mu_1) \cdot v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) \cdot v_2 + (\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_2) \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0 \\ \overset{v_1,v_2,v_3,v_4 \text{ l.u.}}{\iff} &\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & & & & & - & \mu_1 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & + & \mu_2 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses homogenen LGS erhalten wir nach elementaren Zeilenumformungen. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei} \\ \mu_1 &= \alpha \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= -\alpha \\ \lambda_1 &= \alpha; \end{aligned}$$

also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v \in U \cap W \iff v &= \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = \alpha w_1 + \alpha w_2 = \alpha(w_1 + w_2) = \alpha(v_1 - v_2 + v_2 - v_3) \\ &= \alpha(v_1 - v_3), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist demnach
$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (v_1 - v_3).$$
Da $v_1 - v_3 \neq 0$ (weil v_1, v_3 l.u.), ist $\dim(U \cap W) = 1$ und $v_1 - v_3$ eine Basis von $U \cap W$.

mit 5.4; Rechnen in $\mathbb{R}^4$

Wir betrachten die Koordinatenabblidung bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V
$$p : V \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad p(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4.$$

[Damit verlagern wir das ganze Problem in den $\mathbb{R}^4$, betrachten also
$p(u_1), p(u_2), p(u_3), p(w_1), p(w_2) \in \mathbb{R}^4$ statt $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 \in V$,
$p(U) = \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \subset \mathbb{R}^4$ statt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset V$,
$p(W) = \langle p(w_1), p(w_2) \rangle \subset \mathbb{R}^4$ statt $W = \langle w_1, w_2 \rangle \subset V$, und
$p(U \cap W) = p(U) \cap p(W) \subset \mathbb{R}^4$ statt $U \cap W \subset V$.]

Es ist
$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Um zu sehen, ob $p(u_1), p(u_2), p(u_3) \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind, stellen wir die Vektoren zu einer Matrix
$$A := (p(u_1)\ p(u_2)\ p(u_3)) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$
zusammen und bringen diese auf Zeilenstufenform (wir lösen damit das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$; dieses ist übrigens identisch mit dem von oben!). Es ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Damit sind die Spalten $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_2)$ linear unabhängig. Folglich sind nach 5.4 auch die Vektoren u_1, u_2, u_3 linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$; somit ist $\dim(U) = 3$.

Offensichtlich sind $p(w_1)$, $p(w_2)$ linear unabhängig; folglich sind nach 5.4 auch die Vektoren w_1, w_2 linear unabhängig und damit eine Basis des Unterraums $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, so daß $\dim(W) = 2$.

Wir bestimmen nun $p(U) \cap p(W)$:
Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $p(U) \cap p(W)$, wenn er sowohl Linearkombination von $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$ als auch Linearkombination von $p(w_1), p(w_2)$ ist. Also
$$\begin{aligned} x \in p(U) \cap p(W) \iff{} & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) = x = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2) \\ \iff{} & \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ & \lambda_1 p(u_1) + \lambda_2 p(u_2) + \lambda_3 p(u_3) + \mu_1(-p(w_1)) + \mu_2(-p(w_2)) = 0 \\ & \text{und } \quad x = \lambda_1 \cdot p(u_1) + \lambda_2 \cdot p(u_2) + \lambda_3 \cdot p(u_3) = \mu_1 \cdot p(w_1) + \mu_2 \cdot p(w_2) \end{aligned}$$

Wir müssen also das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Dieses LGS ist identisch mit dem von oben, also ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$x \in p(U) \cap p(W) \iff x = \mu_1 p(w_1) + \mu_2 p(w_2) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es ist demnach

$$p(U \cap W) = p(U) \cap p(W) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\dim p(U \cap W) = 1$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $p(U \cap W)$, also ist nach 5.4 auch $\dim(U \cap W) = 1$ und

$$p^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1v_1 + 0v_2 - 1v_3 + 0v_4 = v_1 - v_3$$

eine Basis von $U \cap W$.

3. a) Sei $U := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \subset V$ der von den drei (nicht notwendigerweise linear unabhängigen) Vektoren b_1, b_2, b_3 aufgespannte Unterraum des reellen Vektorraums V. Damit ist $U = \{0\}$ der Nullraum, oder es läßt sich nach dem Basisauswahlsatz aus dem Erzeugendensystem b_1, b_2, b_3 von U eine Basis von U auswählen; auf jeden Fall gilt aber

$$d := \dim(U) \leq 3.$$

Da nach 5.6 b) nun höchstens d Vektoren aus U linear unabhängig sein können, sind die **vier** Vektoren

$$v_1 = b_1 + b_2 + b_3, \qquad v_2 = b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3,$$

$$v_3 = 2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3 \qquad \text{und} \qquad v_4 = 3\,b_1 + b_2 + 2\,b_3,$$

die als Linearkombinationen von b_1, b_2, b_3 in U liegen, sicher linear abhängig.

b) mit 5.4; Rechnen in $\mathbb{R}^3$

Sei p die Koordinatenabblidung bzgl. der Basis b_1, b_2, b_3 von U

$$p : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3.$$

Damit ist

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach 5.4 ist

$$v_1, v_2, v_3 \in V \quad \text{linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad p(v_1), p(v_2), p(v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{linear unabhängig.}$$

Zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ stellen wir diese zu einer Matrix

$$A = (p(v_1),\ p(v_2),\ p(v_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zusammen. Für diese gilt

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (2+3+6) - (4+9+1) = -3 \neq 0;$$

damit sind die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ und folglich auch die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in V$ linear unabhängig.

ohne 5.4; Rechnen in V

Alternativ läßt sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in V$ auch gemäß der Definition, also ohne Rückgriff auf die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ zeigen: Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda_1 \cdot (b_1 + b_2 + b_3) + \lambda_2 \cdot (b_1 + 2b_2 + 3b_3) + \lambda_3 \cdot (2b_1 + 3b_2 + b_3) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3) \cdot b_1 + (\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3) \cdot b_2 + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2 + \lambda_3) \cdot b_3 = 0 \\
&\overset{b_1,b_2,b_3 \text{ l.u.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist identisch mit der Matrix A von oben. Da diese invertierbar ist, hat unser homogenes LGS nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

4. Die Vektoren $p_1(x), p_2(x)$ sind linear unabhängig, da $p_1(x)$ kein Vielfaches von $p_2(x)$ ist, und auch nicht umgekehrt, wie man sofort sieht! Also lassen sie sich nach dem Basisergänzungssatz 5.7c) mit 2 geeigneten Vektoren zu einer Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ergänzen. Gemäß 5.14 können wir hierbei zwei Vektoren aus der Basis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ verwenden. Wir könnten zwei passende durch Ausprobieren herausfinden, wollen hier aber den umgekehrten Weg gehen, und in der Basis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ sukzessive zwei Vektoren durch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ ersetzen:

   Wir stellen $p_1(x)$ als Linearkombination der Basis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ dar. Es ist

$$p_1(x) = \underbrace{2}_{\neq 0} \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3.$$

   Da (z.B.) der Koeffizient bei 1, nämlich 2, ungleich 0 ist, können wir nach 5.13 in der Basis $1, x, x^2, x^3$ die 1 durch $p_1(x)$ ersetzen, und erhalten wieder eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, nämlich

$$p_1(x), x, x^2, x^3.$$

   Wir stellen nun $p_2(x)$ als Linearkombination dieser neuen Basis $p_1(x), x, x^2, x^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ dar. Der Ansatz

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2\, x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 \\ &= \lambda_1(2 + x^2 + x^3) + \lambda_2\, x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 \\ &= 2\lambda_1 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_4)x^3 \end{aligned}$$

   liefert durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -3, \quad \lambda_4 = 0,$$

   also

$$p_2(x) = 1 \cdot p_1(x) + 1 \cdot x + \underbrace{(-3)}_{\neq 0} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3.$$

   Da (z.B.) der Koeffizient bei x^2, nämlich -3, ungleich 0 ist, können wir nach 5.13 in der Basis $p_1(x), x, x^2, x^3$ das x^2 durch $p_2(x)$ ersetzen, und erhalten wieder eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, nämlich

$$p_1(x), x, p_2(x), x^3.$$

   Andersherum betrachtet, haben wir damit die linear unabhängigen Vektoren $p_1(x), p_2(x)$ durch x und x^3 zu einer Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ergänzt (natürlich sind auch andere Lösungen möglich).