MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
7.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = p_3 \\
\iff &\lambda_1 \cdot (1 + X + X^2 - X^3) + \lambda_2 \cdot (4 + 2X + 3X^2 + 4X^3) = 1 - X + 7X^3 \\
\iff &(\lambda_2 + 4\lambda_2)1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)X + (\lambda_1 + 3\lambda_2)X^2 + (-\lambda_1 + 4\lambda_2)\,X^3 = 1 - X + 0X^2 + 7X^3 \\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & -1 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = & 7 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir haben also ein inhomogenes LGS zu lösen: Es ist

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+4\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\frac{1}{2}\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dieses LGS ist lösbar mit $\lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = -3$, also ist

$$-3p_1 + 1p_2 = p_3$$

und damit ist

$$\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

denn:
„$\supset$“: klar!
„$\subset$“: klar, wegen $p_1 \in \langle p_1, p_2 \rangle$ $\surd$
$p_2 \in \langle p_1, p_2 \rangle$ $\surd$
$p_3 = -3p_1 + 1p_2 \in \langle p_1, p_2 \rangle$ $\surd$

b) Ein Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Untervektorräume $U = \langle p_1, p_2 \rangle$ und $W = \langle q_1, q_2 \rangle$, wenn er sowohl Linearkombination von p_1, p_2 als auch Linearkombination von q_1, q_2 ist. Also

$$\begin{aligned}
p \in U \cap W \iff &\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = v = \mu_1 \cdot q_1 + \mu_2 \cdot q_2 \\
\iff &\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \mu_1(-q_1) + \mu_2(-q_2) = 0 \\
&\qquad \text{mit } \quad p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2
\end{aligned}$$

Wir haben damit die Gleichung für $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(1 + X + X^2 - X^3) + \lambda_2(4 + 2X + 3X^2 + 4X^3)\\
&\qquad + \mu_1(1 - X - X^2 + 2X^3) + \mu_2(-1 - X - 2X^2 - 4X^3) = 0\\
&\iff (\lambda_1 + 4\lambda_2 + \mu_1 - \mu_2) \cdot 1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 - \mu_2) \cdot X\\
&\qquad\qquad + (\lambda_1 + 3\lambda_2 - \mu_1 - 2\mu_2) \cdot X^2 + (-\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\mu_1 - 4\mu_2) \cdot X^3 = 0\\
&\overset{1,X,X^2,X^3 \text{l.u.}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0\\
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0\\
\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \mu_1 & - & 2\mu_2 & = & 0\\
-\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\mu_1 & - & 4\mu_2 & = & 0
\end{array}\right.\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1 & -2\\ -1 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1\\ \lambda_2\\ \mu_1\\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem. Wegen

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0\\ -1 & 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{IV}+\text{I}\\ \text{III}-\text{I}\\ \text{II}-\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 8 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{IV}+4\,\text{II}\\ \text{III}+\frac{1}{2}\,\text{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-5\,\text{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned}
&\mu_2 = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{frei}\\
&\mu_1 = -\alpha\\
&\lambda_2 = \alpha\\
&\lambda_1 + 4\alpha - \alpha - \alpha = 0 \implies \lambda_1 = -2\alpha;
\end{aligned}$$

also mit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
p \in U \cap W \quad &\iff \quad p = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 = -\alpha q_1 + \alpha q_2\\
&\iff \quad p = \alpha(-q_1 + q_2) = \alpha(2 + X^2 + 6X^3).
\end{aligned}$$

Es ist demnach

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot (2 + X^2 + 6X^3),$$

weswegen etwa der Vektor $p = 2 + X^2 + 6X^3$ gewählt werden kann.

2. a) Nach 5.2b) hat jede Basis von $\mathbb{R}^n$ die Länge n, besteht also aus genau n Vektoren. Damit können die $n - 1$ Vektoren

$$e_1 + e_2 - e_3,\ e_2 + e_3 - e_4,\ e_3 + e_4 - e_5,\ \dots,\ e_{n-1} + e_n - e_1$$

keine Basis von $\mathbb{R}^n$ sein.

b) Gemäß 5.2c) ist zu überprüfen, ob die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} e_1 & e_1+e_2 & e_1+e_2+e_3 & e_1+e_2+e_3+e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar ist. A ist eine obere Dreiecksmatrix, also ist

$$\det A = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Damit ist A invertierbar und die 4 angegebenen Vektoren also eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

3. a) Gemäß 5.2 der Vorlesung sind n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (beidemale ist die Zahl n, das ist wesentlich!) genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete quadratische Matrix invertierbar ist. Wir müssen also nur die Determinante der Matrix

$$A := (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

berechnen und sehen, für welche $t \in \mathbb{R}$ diese $\neq 0$ ist. Es ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = 2t + 3 + 3 - 2 - 9 - t = t - 5 = 0 \Longleftrightarrow t = 5,$$

also sind die drei Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn $t \neq 5$ ist.

b) Für $t = 4$ sind nach a) die drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ l.u., also gemäß 5.2 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 3 & 4 & b_3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - b_1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array}\right)$$

Für $b = e_1$ haben wir damit:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } Ax = e_1 \text{ dann:} \quad x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 1.$$

Damit ist

$$e_1 = v_1 + v_2 - v_3,$$

also sind 1 , 1 , -1 die Koordinaten
und v_1 , v_2 , $-v_3$ die Komponenten von e_1 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

Für $b = e_2$ haben wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } Ax = e_2 \text{ dann:} \quad x_3 = 2, x_2 = -3, x_1 = 1.$$

Damit ist

$$e_2 = v_1 - 3v_2 + 2v_3,$$

also sind $\quad 1\ ,\ \ -3\ ,\ \ 2 \quad$ die Koordinaten
und $\quad v_1\ ,\ \ -3v_2\ ,\ \ 2v_3 \quad$ die Komponenten von e_2 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

Für $b = e_3$ haben wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \text{also als Lösung des LGS } Ax = e_3 \text{ dann:} \quad x_3 = -1, x_2 = 2, x_1 = -1.$$

Damit ist

$$e_3 = -v_1 + 2v_2 - v_3,$$

also sind $\quad -1\ ,\ \ 2\ ,\ \ -1 \quad$ die Koordinaten
und $\quad -v_1\ ,\ \ 2v_2\ ,\ \ -v_3 \quad$ die Komponenten von e_3 bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$.

c) Für $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$b \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \text{das LGS } A \cdot x = b \text{ ist lösbar.}$$

Mit $t = 5$ ist dann

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 3 & 5 & b_3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III-I} \\ \mathrm{II-I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 4 & b_3 - b_1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III-2\,II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array}\right).$$

Also ist

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 - 2b_2 + b_1 = 0 \Big\}.$$

Ferner hat wegen

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III-I} \\ \mathrm{II-I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III-2\,II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

das homogene LGS $A \cdot x = 0$ die Lösungsmenge

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

also sind

$$\lambda \cdot v_1 - 2\lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 = 0 \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.

4. a) Sei

$$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V, \quad q\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Dann ist

$$(q \circ p)(v) = q(p(v)) = v \quad \text{für alle} \quad v \in \mathrm{V}$$

$$(p \circ q)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = p(q\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Also ist p bijektiv mit Umkehrabbildung $p^{-1} = q$.

b) Seien $u, v \in V$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ und $u = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$, also

$$u + v = (\mu_1 + \lambda_1)v_1 + ... + (\mu_n + \lambda_n)v_n.$$

Dann ist

$$p(u+v) = \begin{pmatrix}\mu_1+\lambda_1\\ \vdots\\ \mu_n+\lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = p(u) + p(v). \quad \surd$$

Seien $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, also

$$\lambda \cdot v = (\lambda\lambda_1)v_1 + ... + (\lambda\lambda_n)v_n.$$

Dann ist

$$p(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix}\lambda\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda\lambda_n\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \lambda \cdot p(v). \quad \surd$$

c)
- “$\Longrightarrow$“:
  Sei $v = \mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r$. Dann ist nach b)

  $$p(v) = p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r) = \mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r). \quad \surd$$

  “$\Longleftarrow$“:
  Sei $p(v) = \mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r)$. Dann ist nach b)

  $$p(v) = p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r),$$

  woraus, weil p nach a) injektiv ist, folgt

  $$v = \mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r. \quad \surd$$

- “$\Longrightarrow$“:
  Sei $\mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r) = 0 \in \mathbb{R}^n$ (z.z. ist: $\mu_1 = ... = \mu_r = 0$)

  $$\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r) = 0 = p(0_V)$$
  $$\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r = 0_V$$
  $$\overset{w_1,...,w_r \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \mu_1 = ... = \mu_r = 0 \quad \surd$$

  “$\Longleftarrow$“:
  Sei $\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r = 0_V \in V$ (z.z. ist: $\mu_1 = ... = \mu_r = 0$)

  $$\Longrightarrow p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r) = p(0_V)$$
  $$\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} \mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r) = p(0_V) = 0$$
  $$\overset{p(w_1),...,p(w_r) \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \mu_1 = ... = \mu_r = 0 \quad \surd$$

- “$\Longrightarrow$“:

  Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Weil p nach a) surjektiv ist, gibt es $v \in V$ mit $x = p(v)$

  $$\begin{aligned}
  &\overset{\langle w_1,...,w_r\rangle = V}{\Longrightarrow} \mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r = v \quad \text{für } \mu_1, ..., \mu_r \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\\
  &\Longrightarrow p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r) = p(v)\\
  &\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} \mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r) = p(v) = x\\
  &\Longrightarrow x \in \langle p(w_1), ..., p(w_r)\rangle
  \end{aligned}$$

  Also ist $\quad \langle p(w_1), ..., p(w_r)\rangle = \mathbb{R}^n$.

  “$\Longleftarrow$“:

  Sei $v \in V$. Dann ist $x := p(v) \in \mathbb{R}^n$

  $$\begin{aligned}
  &\overset{\langle p(w_1),...,p(w_r)\rangle = \mathbb{R}^n}{\Longrightarrow} \mu_1 p(w_1) + ... + \mu_r p(w_r) = x \quad \text{für } \mu_1, ..., \mu_r \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\\
  &\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} p(\mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r) = x = p(v)\\
  &\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \mu_1 w_1 + ... + \mu_r w_r = v\\
  &\Longrightarrow v \in \langle w_1, ..., w_r\rangle
  \end{aligned}$$

  Also ist $\quad \langle w_1, ..., w_r\rangle = V$.