MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 1
22.10.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Das erste LGS läßt sich durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix darstellen:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Wir gehen nun nach dem Gaußschen Algorithmus vor, um „von links nach rechts und von oben nach unten“ die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-5\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-7\cdot\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+4\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) =: (A' \mid b')$$

Die Matrix A' hat Zeilenstufenform. *[Das Ausdividieren gemeinsamer Faktoren innerhalb einer Zeile, wie wir es im dritten Schritt (Multiplikation der II-ten Zeile mit $-1/3$) gemacht haben, ist nicht notwendig, aber empfehlenswert, um fehlerträchtiges Bruchrechnen zu vermeiden!]*
Wir lösen „von unten her“:

$$\begin{aligned} 1\,x_3 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = 0 \quad \text{(letzte Zeile der Matrix)} \\ 3x_2 + 0 = 1 &\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(zweite Zeile der Matrix)} \\ 1\,x_1 + \frac{1}{3} + 0 = 1 &\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad \text{(erste Zeile der Matrix).} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das zweite LGS liefert die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Wir werfen wieder den Gaußschen Algorithmus an, wobei wir in der Notation einige EZUs zusammenfassen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-5\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-4\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -8 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}+8\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+7\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 19 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A' \mid b')$$

Die Matrix A' besitzt Zeilenstufenform. An $(A' \mid b')$ erkennt man, daß das LGS *keine* Lösung besitzt: Denn die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix liefert die Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, die nicht lösbar ist. *(Generell besitzt ein Gleichungssystem keine Lösung, wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form* $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{array}\right)$ *mit* $* \neq 0$ *enthält.)*
Es ist also

$$L = \varnothing.$$

2. In beiden Fällen hilft der Gaußsche Algorithmus: Für die erste erweiterte Koeffizientenmatrix ergibt sich

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 24 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-4\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (A' \mid b')$$

Die Matrix A' ist in Zeilenstufenform. Wir könnten also das Umformen einstellen; noch einfacher wird die Rechnung jedoch, wenn wir zuletzt noch die zweite Zeile von der ersten abziehen, um zur Matrix

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zu gelangen *(jetzt liegt, da auch die Pivots, also die Zahlen, die in den „Stufenecken“ stehen, gleich 1 sind, eine sog. reduzierte ZSF vor)*.
Die letzte Zeile liefert keinen Beitrag (sie entspricht der Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, die stets erfüllt ist). Die vorletzte Zeile besagt, daß die Variablen x_3 und x_4, die „zum hinteren Teil einer breiteren Stufe“ gehören, frei gewählt werden können, also $x_4 = \lambda$, $x_3 = \mu$, und dann ist $x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -6$, also $x_2 = 2\lambda + 2\mu - 6$. Die erste Zeile schließlich besagt $x_1 + x_4 = 4$, also $x_1 = 4 - x_4 = 4 - \lambda$. Es ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-\lambda \\ 2\lambda + 2\mu - 6 \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die zweite erweiterte Koeffizientenmatrix liefert der Gaußsche Algorithmus

$$
(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-7\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-4\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -8 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{\substack{\mathrm{IV}+3\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-3\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) =: (A' \mid b')
$$

Die Matrix A' hat Zeilenstufenform, und wir können die Lösung nun von unten nach oben ablesen:

$$
\begin{aligned}
5\,x_4 = 4 \quad &\Longrightarrow \quad x_4 = \frac{4}{5} \quad \text{(letzte Zeile der Matrix)} \\
-x_3 - 3\frac{4}{5} = -3 &\Longrightarrow \quad x_3 = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{(dritte Zeile der Matrix)} \\
x_2 + \frac{3}{5} = 1 &\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{2}{5} \quad \text{(zweite Zeile der Matrix)} \\
x_1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 2 &\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{5} \quad \text{(erste Zeile der Matrix)}
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir also

$$
L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\}.
$$

3. Solche Aufgaben löst man, indem man sich vom Auftreten der Parameter nicht weiter stören läßt und sie durch das ganze Gauß-Verfahren hindurch mitschleppt; am Ende kann man dann sehen, inwieweit und wie die ZSF von den Parametern abhängt.

   a) Beginnen wir also:

$$
(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\frac{3}{2}\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2{,}5 & 6 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \overset{2\cdot\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 12 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right)
$$

$$
\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 12 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & t \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-5\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+5\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & t \end{array}\right)
$$

$$
\overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{array}\right) =: (A' \mid b')
$$

   Die Matrix A' hat ZSF, womit die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

   <u>1.Fall:</u> $t - 7 \neq 0$, also $t \neq 7$
   Hier besitzt das LGS keine Lösung (dies liefert die letzte Zeile).

   <u>2.Fall:</u> $t - 7 = 0$, also $t = 7$

Hier ist $L_t \neq \varnothing$, und wir erhalten von unten nach oben der Reihe nach $x_3 = 1$, $x_2 - 1 = 0$, also $x - 3 = 1$, und $2x_1 + 1 = 1$, also $2x_1 = 0$ und damit $x_1 = 0$.
Die Lösungsmenge L_t in Abhängigkeit vom Parameter t lautet also

$$L_t = \varnothing \quad \text{für } t \neq 7, \qquad L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Wir lösen das LGS mit der erweiterten Koeffizientenmatrix durch den Gaußschen Algorithmus. Es ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & \beta \\ -1 & -1 & -1 & -2 & \alpha & \gamma \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 2 & \beta - \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & \alpha - 1 & \gamma + \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrrrr|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 2 & \beta - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 & \gamma + \frac{1}{2} - \beta + \frac{1}{2} \end{array}\right) =: (A' \mid b')$$

Die Matrix A' liegt, egal welchen Wert α hat, in Zeilenstufenform vor; allerdings sieht die „Treppe" unterschiedlich aus. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

<u>1.Fall:</u> $\alpha \neq 3$
Hier hat die „Treppe" von A' 3 Stufen, reicht also bis zur letzten (untersten) Zeile. Damit ist für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ das LGS lösbar, also $L_{\alpha,\beta,\gamma} \neq \varnothing$.

<u>2.Fall:</u> $\alpha = 3$
Hier ist die letzte Zeile von A' eine Nullzeile, die „Treppe" hat also nur 2 Stufen. Das LGS ist dann nur lösbar, wenn in der 3. Zeile von $(A' \mid b')$ auch rechts eine 0 steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\gamma - \beta + 1 = 0$, also $\gamma = \beta - 1$.

Insgesamt erhalten wir also

$$L_{\alpha,\beta,\gamma} \neq \varnothing \quad \iff \quad \alpha \neq 3 \ \vee \ \gamma = \beta - 1.$$

4. Schreiben wir die gesuchte Zahl als $x =$ „abc" mit den Ziffern a, b, c, so gilt $x = 100a + 10b + c$, und die die drei gegebenen Bedingungen lauten der Reihe nach:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 18, \\ 100b + 10a + c &= x + 180 = 100a + 10b + c + 180, \\ 100a + 10c + b &= x + 18 = 100a + 10b + c + 18. \end{aligned}$$

Bringt man die in den unteren beiden Gleichungen noch rechts stehenden Variablen a, b, c auf die linke Seite, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in der üblichen Form:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 18, \\ -90\,a & + & 90\,b & & & = & 180, \\ & & -9\,b & + & 9\,c & = & 18. \end{array}$$

Auf die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix wenden wir den Gaußschen Algorithmus an:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ -90 & 90 & 0 & 180 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{1}{9}\cdot\mathrm{III} \\ \frac{1}{90}\cdot\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 12 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Matrix können wir von unten nach oben ablesen:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}c = 12 \quad &\Longrightarrow \quad c = 8 \\ 2b + c = 20 &\Longrightarrow \quad 2b = 12 \quad \Longrightarrow \quad b = 6 \\ a + b + c = 18 &\Longrightarrow \quad a = 18 - 6 - 8 = 4. \end{aligned}$$

Wir haben also tatsächlich Ziffern (also Elemente von $\{0, 1, \ldots, 9\}$ als Lösungen erhalten, und es ist $x =$ „abc“ $= 468$.