MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
3.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

   b) Bestimmen Sie die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

   c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

2. Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; ferner bezeichne U die Menge aller Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot X = X \cdot A$.

   a) Drücken Sie die Beziehung $A \cdot X = X \cdot A$ als lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, x_3, x_4 aus und bestimme dessen Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^4$.

   b) Zeigen Sie
   $$U = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

3. Es sei
   $$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = A_\alpha A_\alpha^\top \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $B_\alpha x = b$ eine eindeutige Lösung?

   b) Nun sei $\alpha = 1$. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $B_1 x = b$.

4. *In dieser Aufgabe beweisen wir die Rechenregel 4.3 d) aus der Vorlesung.*

   Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum sowie $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Weisen Sie nach, daß $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = 0_V$ sowie $\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = 0_V$ ist.

   b) Begründen Sie sorgfältig, warum aus a) folgt, daß $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$ ist.

Für die Tutorien vom 3.12. bis 7.12.18