MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 14
4.2.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Sind die folgenden Abbildungen f linear? (Antwort mit Begründung!)

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x + 1$

   c) $f : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}(\mathbb{R}), \quad f(p(x)) = x \cdot p(x)$

   d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A) = \det A$

2. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot x.$$

   Untersuchen Sie f auf Injektivitiät und Surjektivität.

3. Wie viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen Vorgaben gibt es jeweils? Antwort mit Begründung!

   i) $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   ii) $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   iii) $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Zeigen Sie, daß es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f.

Für die Tutorien vom 4.2. bis 8.2.19