MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 13
28.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. In Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachte man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Bestimmen Sie den Rang von A sowie eine Basis für den Lösungsraum L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

   b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar? Bestimmen Sie hierfür auch eine partikuläre Lösung x_p.

   c) Geben Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.

2. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   a) Zeigen Sie, daß

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rang}(A \cdot B) = n.$$

   Hinweis: Für quadratische $n \times n$-Matrizen C gilt: $\operatorname{Rang} C = n \iff C$ *ist invertierbar.*

   b) Zeigen Sie an einem Beispiel mit $n = 2$, daß i.a.

$$\operatorname{Rang}(A \cdot B) \neq \operatorname{Rang}(B \cdot A).$$

   c) Geben Sie jeweils, <u>falls existent</u>, Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 2$ an, so daß gilt:

   i) $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 3$ ii) $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 2$ iii) $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 1$
   iv) $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 0$.

Bemerkung: Man kann ganz allgemein zeigen, daß $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \min\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\}$, wenn immer das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden kann.

3. Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

4. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2 \\ -2\alpha & -\frac{3}{2}\alpha & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowie die Dimension des Untervektorraums $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Für die Tutorien vom 28.1. bis 1.2.19