MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
21.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Gegeben seien die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$.

   U sei der von u_1, u_2 und u_3 aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$. $W \subset \mathbb{R}^4$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & - & x_3 & + & 7\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 4\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

   a) Bestimmen Sie eine Basis von U und eine Basis von W.
   b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$, sowie die Dimension von $U + W$.
   c) Ergänzen Sie Ihre Basis von $U \cap W$ aus b) zu einer Basis von $U + W$.

2. a) Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Welche Dimension kann $W_1 \cap W_2$ haben, wenn $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ und $\dim V = 5$ ist? Belegen Sie jeden möglichen Wert von $\dim (W_1 \cap W_2)$ durch ein Beispiel mit $V = \mathbb{R}^5$.

   b) Sei $V = \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ und

$$U = \langle 1 + x + x^2,\ \ x + x^2 + x^3,\ \ x^2 + x^3 + x^4 \rangle \subset V$$

   Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum mit $U \oplus W = V$. Was ist dann $\dim W$? Geben Sie ein solches $W \subset V$ an.

3. Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, also $\dim V < \infty$, und es seien $U, W \subset V$ Untervektoräume mit der Eigenschaft $\dim U + \dim W = \dim V$.

   a) Beweisen Sie, daß dann auch $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim V$ ist.
   b) Folgern Sie, daß dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
      i) Es ist $U + W = V$.
      ii) Es ist $U \oplus W = V$.
      iii) Es ist $U \cap W = \{0\}$.

   (Hinweis: Beim Ringschluß i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ i) ist ii) $\Longrightarrow$ iii) klar (warum?), für die beiden anderen Implikationen hilft a).)

4. In dieser Aufgabe wollen wir den Beweis der Dimensionsformel (Satz 5.18) aus der Vorlesung im dort nicht ausführlich behandelten Fall $U \cap W = \{0\}$ als Lückentext erarbeiten. Also:

> **Satz** Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $U, W \subset V$ Untervektorräume mit $U \cap W = \{0\}$ (aber $U, W \neq \{0\}$). Dann gilt
>
> $$\dim(U + W) = \dim U + \dim W \qquad (= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)).$$

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} u_1, \dots, u_r &\quad \text{eine Basis von } U, \\ w_1, \dots, w_s &\quad \text{eine Basis von } W. \end{aligned}$$

Behauptung: Dann ist $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ eine Basis von $U + W$.
(Warum genügt es, diese Behauptung zu beweisen?)

Erzeugendensystem: Es gilt

$$\begin{aligned} U + W &= \langle \underline{\qquad\qquad} \rangle + \langle \underline{\qquad\qquad} \rangle \\ &= \langle \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \rangle , \end{aligned}$$

also erzeugen die Vektoren den Untervektorraum $U + W$.

Lineare Unabhängigkeit: Es seien $\mu_1, \dots, \mu_r, \tau_1, \dots, \tau_s \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r + \tau_1 w_1 + \ldots + \tau_s w_s = 0. \qquad (*)$$

Zu zeigen ist ______________________________.
Aus $(*)$ folgt

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung liegt im Untervektorraum __, die rechte im Untervektorraum __. Der gemeinsame Wert (beide Seiten sind ja gleich!) liegt also im Untervektorraum ______ $= \{0\}$.

Also gilt $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0$ und ebenso ________________ $= 0$.

Wegen ____ folgt daraus $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Ebenso

folgt aber ________________, und damit ist die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ bewiesen.

Bemerkung: Strenggenommen wäre es nicht unbedingt nötig, diesen Beweis im Fall $U \cap W = \{0\}$ gesondert zu führen. Der Beweis aus der Vorlesung funktioniert völlig allgemein, wenn man bereit ist, auch dem Nullvektorraum $\{0\}$ eine Basis zuzubilligen, die dann eben aus *null* Vektoren besteht; ebenso kann man auch auf die eigene Behandlung der Fälle $U = \{0\}$ bzw. $W = \{0\}$ verzichten.

Für die Tutorien vom 21.1. bis 25.1.19