MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
14.1.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei $U_a$ der von den folgenden Vektoren aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a$ eine Basis von $U_a$.

   b) Ergänzen Sie im Fall $a = 0$ Ihre Basis von $U_0$ aus a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

2. Es sei $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ eine Basis eines $\mathbb{R}$–Vektorraums $V$. Weiter sei $U$ der von

$$u_1 := v_1 + v_2, \quad u_2 := v_2 + v_3, \quad u_3 := v_3 + v_4$$

   aufgespannte Untervektorraum und $W$ der von

$$w_1 := v_1 - v_2, \quad w_2 := v_2 - v_3$$

   aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie die Dimensionen der Untervektorräume $U$, $W$, $U \cap W$ und geben Sie eine Basis von $U \cap W$ an.

   *Lösen Sie diese Aufgabe ...*

   *i) durch Rechnen in $V$*

   *ii) durch Übergang zum $\mathbb{R}^4$ mittels der Koordinatenabbildung aus 5.4*

3. Sei $b_1$, $b_2$, $b_3$ Vektoren eines reellen Vektorraums $V$. Zeigen Sie:

   a) Die Vektoren $v_1 = b_1 + b_2 + b_3$, $v_2 = b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3$, $v_3 = 2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3$ und $v_4 = 3\,b_1 + b_2 + 2\,b_3$ sind linear abhängig.

   b) Ist $b_1$, $b_2$, $b_3$ eine Basis von $V$, so sind die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ linear unabhängig.

4. In $V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ seien die Vektoren

$$p_1(x) = 2 + x^2 + x^3 \quad , \quad p_2(x) = 2 + x - 2x^2 + x^3$$

   gegeben. Zeigen Sie, daß $p_1(x), p_2(x)$ linear unabhängig sind und ergänzen Sie $p_1(x), p_2(x)$ zu einer Basis von $V$ **unter Verwendung von 5.13**, indem Sie schrittweise zwei Vektoren der Basis $1, x, x^2, x^3$ von $V$ durch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ ersetzen.

**Für die Tutorien vom 14.1. bis 18.1.19**