MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
7.1.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Im reellen Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ seien die Vektoren
$$p_1 = 1 + X + X^2 - X^3, \quad p_2 = 4 + 2X + 3X^2 + 4X^3, \quad p_3 = 1 - X + 7X^3,$$
sowie
$$q_1 = -1 + X + X^2 - 2X^3, \qquad q_2 = 1 + X + 2X^2 + 4X^3$$
gegeben. Seien $U := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ und $W := \langle q_1, q_2 \rangle \subset \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

   a) Stellen Sie $p_3$ als Linearkombination von $p_1, p_2$ dar, und folgern Sie, daß $U = \langle p_1, p_2 \rangle$.

   b) Ermitteln Sie einen Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, so daß gilt
$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot p.$$

2. Nach 5.2a) der Vorlesung bilden die Einheitsvektoren $e_1, e_2, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob folgende Aussagen richtig sind:

   a) Die Vektoren $e_1 + e_2 - e_3,\ e_2 + e_3 - e_4,\ e_3 + e_4 - e_5,\ \dots,\ e_{n-1} + e_n - e_1$ bilden ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (bei $n \geq 3$).

   b) Die Polynome $e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die $v_1,\ v_2,\ v_3$ linear unabhängig sind.

   b) Für (z.B.) $t = 4$ *sind* $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig, und damit (warum?) eine Basis $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Koordinaten sowie die Komponenten der Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3$ bezüglich dieser Basis $v_1,\ v_2,\ v_3$.

   c) Geben Sie für $t = 5$ den Untervektorraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ durch eine Gleichung, d.h. in der Form
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0 \Big\}$$
an, und bestimen Sie alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der $v_1,\ v_2,\ v_3$.

4. *In dieser Aufgabe beweisen wir Lemma 5.4 aus der Vorlesung:*

   Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$. Es sei
$$p : V \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,$$
die *Koordinatenabbildung* bzgl. der Basis $v_1, \dots, v_n$ (vgl. (5.5) in der Vorlesung).

a) Zeigen Sie, daß $p$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung $p^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ an.

b) Zeigen Sie, daß für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p(u + v) = p(u) + p(v)$$
$$p(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot p(v), \quad \text{insbesondere also } \; p(0_V) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

c) Zeigen Sie, daß für $v, w_1, \ldots, w_r \in V$ und $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ gilt

i. $v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r \iff p(v) = \mu_1 p(w_1) + \ldots + \mu_r p(w_r)$.

ii. $w_1, ..., w_r$ linear unabhängig $\iff$ $p(w_1), ..., p(w_r)$ linear unabhängig

iii. $\langle w_1, \ldots, w_r \rangle = V \iff \langle p(w_1), \ldots, p(w_r) \rangle = \mathbb{R}^n$.

**Für die Tutorien vom 7.1. bis 11.1.19**