MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
12.12.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{|a|}\cdot|x| = |x|.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe daher für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$|a_n x^n| = |a_n|\cdot|x|^n = |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| \neq 0$$

Damit ist die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge und folglich die Reihe divergent.

Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Reihe genau für alle $x \in \,]-1,1[$.

b) Konvergiert die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n^2 a_n \neq 0$ und damit auch $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| &= \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n}\right|\cdot|x| = \frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|}\cdot|x| \\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{|(n+1)^2 a_{n+1}|}{|n^2 a_n|}\cdot|x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+0)^2}\cdot\frac{|a|}{|a|}\cdot|x| = |x|.\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergent sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent.

Für $|x| = 1$ ergibt sich

$$n^2\cdot|a_n x^n| = \left|n^2 a_n\right|\cdot|x|^n = \left|n^2 a_n\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a| > 0;$$

damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \geq n_0$

$$0 \leq n^2\cdot|a_n x^n| \leq 2\,|a|\,, \qquad \text{also} \qquad 0 \leq |a_n x^n| \leq \frac{2\,|a|}{n^2}$$

gilt. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2|a|}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium ist also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, und damit auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (absolut) konvergent.
Insgesamt konvergiert in diesem Fall die Reihe genau für alle $x \in [-1,1]$.

c) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, gilt

$$0 \le a_n \le a_0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

- Sei $|x| < 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$0 \le |a_n x^n| = a_n \cdot |x|^n \le a_0 \cdot |x|^n.$$

Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ wegen $|x| < 1$ konvergiert, ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0|x|^n$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (sogar absolut).

- Sei $|x| > 1$. Wegen $a_n \ge \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n x^n| = a_n\,|x|^n \ge \frac{1}{n}|x|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

denn mit $b = |x| > 1$ gilt nach 1.32 c), daß $\frac{n}{|x|^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, woraus wegen $\frac{n}{|x|^n} > 0$ dann $\frac{1}{n}|x|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ folgt. Damit kann $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge sein, also ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent.

- Sei $|x| = 1$.
Falls $x = 1$, so ist für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n x^n = a_n \ge \frac{1}{n} \ge 0.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, ist nach dem Minorantenkriterium die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, also auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Falls $x = -1$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ nach dem Leibnizkriterium konvergent.

2. a) Zu betrachten ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - n^5}{n^7} = \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für alle $s > 1$ konvergiert (siehe 2.20 b)), konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und damit auch ihre Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le |a_n| = \left|\frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$$

ist nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, insbesondere also konvergent.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}\sqrt{n} - \sqrt{n+2} &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}) \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{n - (n+2)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}.\end{aligned}$$

Die Folge $\left(\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, und wegen

$$0 \le \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \le \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt mit dem Schrankenlemma, daß $\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also ist $\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Nullfolge und damit ist nach dem Leibnizkriterium die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)$$

konvergent.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist (siehe oben)

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)\right| &= \left|\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)\right| = \left|-\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &\ge \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \ge 0.\end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)\right|$$

divergent. Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)$ **nicht** absolut.

3. Wir unterscheiden 3 Fälle:
<u>1. Fall</u>: $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$:
Die Menge $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ ist Vereinigung von drei <u>offenen</u> Intervallen

$$\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} = \;]-\infty, -1[\;\cup\;]-1, 1[\;\cup\;]1, \infty[$$

Als rationale Funktion ist die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}}$ stetig, also ist f stetig in allen $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ (siehe 3.9b)).

2. Fall: $a = -1$:
Hier ist

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{x^3+3x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to -1+} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1+} \frac{x^2+x+4}{x+1} = \infty.$$

Damit kann f in $a = -1$ gar nicht stetig sein. (Wegen $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-} \frac{(x^2+x+4}{x+1} = -\infty$ existiert $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nicht einmal uneigentlich)

3. Fall: $a = 1$
Hier gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+4}{x+1} = \frac{6}{2} = 3 = f(1),$$

also ist f stetig in $a = 1$.

Zusammenfassend ist f also genau in den Punkten

$$a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

stetig.

4. a) Sei $x \in]0,\infty[$. Dann ist

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 4,$$

also $f(x) > 4$.

b) Sei $y \in]4,\infty[$. Dann gilt für $x \in]0,\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) = y \iff & \frac{4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = y \\ \iff & 4 + \frac{1}{\sqrt{x}} = y \\ \iff & \frac{1}{\sqrt{x}} = y - 4 \\ \iff & \sqrt{x} = \frac{1}{\underbrace{y-4}_{>0}} \\ \iff & x = \left(\frac{1}{y-4}\right)^2. \end{aligned}$$

Mit $x = \left(\frac{1}{y-4}\right)^2 \in]0,\infty[$ ist also $f(x) = y$ (das ist „$\Longleftarrow$“ in obiger Äquivalenzkette)

c) Aus a) folgt, daß $W_f \subset]4,\infty[$, und aus b), daß $W_f \supset]4,\infty[$, also gilt $W_f =]4,\infty[$.

Aus der in b) gezeigten Äquivalenz folgt, daß zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in]0,\infty[$ existiert mit $f(x) = y$. Somit ist f umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]4,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x-4}\right)^2.$$