MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
21.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)" -Lösungssvorschlag-

1. a) Für $0 < x < 1$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

und mit $y > 0$ und damit $y^n > 0$ ergibt sich

$$0 < \frac{x^n}{1+y^n} < x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus dem Schrankenlemma 1.19 folgt damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Für $x = 1$ ist $x^n = 1$ und damit

$$a_n = \frac{1}{1+y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; somit erhält man:

- Für $0 < y < 1$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

- Für $y = 1$ ist $y^n = 1$ und damit $a_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- Für $1 < y$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\to \infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

c) Für $x > 1$ erhält man

$$a_n = \frac{x^n}{1+y^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \frac{y^n}{x^n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \left(\frac{y}{x}\right)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad \text{und damit} \qquad \frac{1}{x^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit erhält man:

- Für $0 < y < x$ ist $\frac{y}{x} < 1$, also

$$0 < \underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{und damit (wegen } \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{y}\right)^n > 0 \text{)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

- Für $y = x$ ist $\frac{y}{x} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{=1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

- Für $x < y$ ist $\frac{y}{x} > 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\to \infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2. Wir zeigen, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge in den reellen Zahlen ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$, o.E. $n \geq m$,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i^2} \Big| = \Big| \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2} \Big| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2} \\
&\overset{\frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{i(i-1)}}{\leq} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i-1} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
Da die reellen Zahlen vollständig sind, ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit konvergent.

3. a) Seien $a_n = \frac{1}{n}$ sowie $b_n = \frac{1}{n^2}$ und damit $\frac{a_n}{b_n} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \infty$.

   b) Seien $a_n = -\frac{1}{n}$ sowie $b_n = \frac{1}{n^2}$ und damit $\frac{a_n}{b_n} = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = -\infty$.

   c) Seien $a_n = \frac{c}{n}$ sowie $b_n = \frac{1}{n}$ und damit $\frac{a_n}{b_n} = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = c$.

   d) Seien $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ sowie $b_n = \frac{1}{n}$ und damit $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, und die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.

4. Sei $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, also $x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Setzen wir in der für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültigen Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$$

$x = x'_n$ und $y = a$, so erhalten wir

$$0 \leq |f(x'_n) - f(a)| \leq q \cdot |x'_n - a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also gilt nach dem Schrankenlemma 1.19, daß $f(x'_n) - f(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also

$$x_n = f(x'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

Damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $f(a)$.

ODER SO (ohne Verwendung des Grenzwerts a):

Wir zeigen, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist:
Sei dazu $\varepsilon > 0$. Weil $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt $|x'_n - x'_m| < \frac{\varepsilon}{q}$ (wir können o.E. $q > 0$ annehmen).
Damit gilt für $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| = |f(x'_n) - f(x'_m)| \leq q\,|x'_n - x'_m| < q \cdot \frac{\varepsilon}{q} \;=\; \varepsilon\,.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also ebenfalls eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und daher konvergent.