

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Bestimmen Sie die folgenden (ggf. auch uneigentlichen) Grenzwerte bzw. zeigen Sie, daß der Grenzwert (auch im uneigentlichen Sinn) nicht existiert:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2x - 3x^2}{x^2 - x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(x - 1)^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 12x^4 + 2x^2 - 1}{(x - 3)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + [x]}{2 + [2x]}$ (dabei ist $[y] := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq y\}$ die Gaußklammer von y)

2. Für die reellen Parameter $m, t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -mx^2 + tx & \text{für } x \leq 0 \\ mx + t & \text{für } 0 < x < 2, \\ mx^2 + 2mx - 12 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Paare $(m, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die f stetig ist, und skizzieren Sie für diese Fälle den Graphen G_f .

3. Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien definiert durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

- a) Zeigen Sie, daß alle g_n stetig sind und $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.
b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

stetig ist.

4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$. Zeigen Sie, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt:

$$f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$$

Abgabe bis 9.1.2019, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).