

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Untersuchen Sie jeweils, ob $x \in \mathbb{R}$ existieren für die gilt

a) $e^x = x$ b) $e^x = 2x$ c) $e^x = 4x$.

2. Zeigen Sie unter Verwendung des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums, daß die folgenden Funktionen in jedem Punkt $a \in D$ mit der angegebenen Definitionsmenge stetig sind. Geben Sie also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta > 0$ an, so daß aus $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt.

a) $f(x) = -3x$, $D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

- a) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion f .
b) Zeigen Sie, daß f streng monoton wachsend ist und begründen Sie, warum f umkehrbar ist.
c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f .

4. Eine Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in]0, \infty[$. Zeigen Sie:

- i) Es gilt $f(1) = 0$.
ii) Es gilt $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ für alle $x, y > 0$.
iii) Es gilt $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ für alle $x, y > 0$.

Abgabe bis 23.1.2019, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).