MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
26.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Eine geometrische Reihe ist von der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

(wobei die Summation nicht notwendig bei $k = 0$ beginnen muß; und statt x^k kann auch $c \cdot x^k$ stehen mit festem $c \in \mathbb{R}$) mit einer festen, d.h. nicht vom Laufindex abhängigen Zahl $x \in \mathbb{R}$. Die angegebene Reihe ist offensichtlich **nicht** von dieser Form, das angebliche $x = \frac{k}{k+1}$ hängt ja von k ab!
Zudem kommt in dem angeblichen Reihenwert $\frac{1}{1-\frac{k}{k+1}} = k+1$ ebenfalls noch der Laufindex k vor, was überhaupt keinen Sinn macht!

Eine korrekte Konvergenzuntersuchung geht folgendermaßen:
Mit $a_k := \left(\frac{k}{k+1}\right)^k, k \in \mathbb{N}$, ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder **keine** Nullfolge, denn es ist

$$\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k = \big(1 + \frac{1}{k}\big)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e,$$

also nach 1.23

$$a_k = \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^k = \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0.$$

Da $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ nach 2.3 der Vorlesung also divergent.

2. Bei a)-c) handelt es sich jeweils um geometrische Reihen $\sum\limits_k q^k$ bzw. $\sum\limits_k c\, q^k$, wobei bei der Berechnung des Reihenwertes darauf zu achten ist, wo die Summation beginnt.

   a) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^k$ ist wegen $\left|-\frac{2}{7}\right| < 1$ konvergent mit Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{2}{7}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(-\frac{2}{7}\Big)^k - 1 = \frac{1}{1-(-\frac{2}{7})} - 1 = \frac{1}{\frac{9}{7}} - 1 = \frac{7}{9} - 1 = -\frac{2}{9}.$$

   Also ist auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^k$ konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} x \cdot \Big(-\frac{2}{7}\Big)^k = -x \cdot \frac{2}{9}.$$

b) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^k$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\left|\frac{2x^2}{1+x^2}\right| < 1,$$

also wenn $\;2x^2 < 1 + x^2$, also $\;x^2 < 1$, also $-1 < x < 1$.
Für den Reihenwert gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{1 - \frac{(2x^2)}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad x \in]-1, 1[.$$

c) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x-2.5}{(x-3)^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (x-2.5) \frac{1}{(x-3)^k}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$x - 2.5 = 0 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{1}{x-3}\right| < 1.$$

Wegen

$$\left|\frac{1}{x-3}\right| < 1 \iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff x < 2 \text{ oder } x > 4$$

konvergiert also die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x-2.5}{(x-3)^k}$ also genau für alle

$$x \in]-\infty, 2[\cup]4, \infty[\cup \{2.5\} = (\mathbb{R} \setminus [2,4]) \cup \{2.5\},$$

und für den Reihenwert gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x-2.5}{(x-3)^k} = \frac{x-2.5}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{(x-2.5)\,(x-3)}{(x-3)-1} = \frac{x^2 - 5.5x + 7.5}{x-4}.$$

3. a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2},$$

wie sich unmittelbar aus dem Ansatz $\frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$ ergibt (Partialbruchzerlegung!). Für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich nun für die n–te Partialsumme s_n der gegebenen Reihe

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

konvergiert die gegebene Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+2)}$ und der Reihenwert ist $\frac{3}{4}$.

b) Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $k \geq k_0$ gilt $k \geq x$ (d.h. k_0 die kleinste natürliche Zahl, welche $\geq x$ ist). Damit ist für alle $k \geq k_0$

$$\frac{1}{x+k} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k} \geq 0.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent ist [denn: wäre diese Reihe konvergent, so wäre nach 2.7 (Rechenregeln für konvergente Reihen) auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\frac{1}{2k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent, was aber nicht der Fall ist (harmonische Reihe ist divergent!)], ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k}$ divergent.

4. a) Da die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist sie auch beschränkt, und damit ist auch die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es gibt also ein $K > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq K,$$

also

$$0 \leq |a_n| \leq K\,|b_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist, ist also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergent, und damit auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K|b_n|$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

b) Ohne die vorausgesetzte **absolute** Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist die Behauptung i.a. falsch: Wähle z.B.

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

so ist $\dfrac{a_n}{b_n} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent, aber die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (harmonische Reihe!) nicht.