MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 4
12.11.2018

# Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a$ konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n := \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$
gegen $a$ konvergiert.

   b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so daß die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   c) Sei vorausgesetzt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

2. Student Rainer Wahnsinn meint, wegen der Konvention „$0^0 = 1$“ wäre **immer**
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 1,$$
**wenn** $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (bei $x_n, y_n > 0, y_n \in \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$).
Als Beispiel führt er die Folge $(x_n^{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ an:
Unter Verwendung von 1.32 b) gilt in der Tat
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1.$$
Hat Student Rainer Wahnsinn recht? Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 1$ gilt bei $x_n \to 0, y_n \to 0$ **nur**, wenn $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Es gibt $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \frac{1}{2}$.

   c) Es gibt $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

   d) Es gibt $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ mit $\left(x_n^{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **nicht** beschränkt.

   e) Es gibt $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ mit $\left(x_n^{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **nicht** konvergent.

   (jeweils wie oben $x_n, y_n > 0, y_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, damit ist also $x_n^{y_n} = x_n^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{x_n^k}$ )

3. Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   a) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

   b) $x_n = \sqrt[n]{4^n - 2^n}$.

4. Gegeben sei die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}, \quad n \geq 1,$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeigen Sie, daß die Teilfolgen $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend bzw. monoton fallend sind.

b) Zeigen Sie, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

**Für die Tutorien am 12. und 13.11.18**