ALGEBRA II

Prof. Dr. B. Pareigis

Sommersemester 1997

Inhaltsverzeichnis

1. Das Tensorprodukt und freie Moduln

Definition 1.1. Sei R ein Ring (immer assoziativ mit Einselement). Ein *R-Links-Modul* ${}_RM$ ist eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe M zusammen mit einer Operation $R \times M \ni (r, m) \mapsto rm \in M$, so daß

(1) $(rs)m = r(sm)$,
(2) $(r + s)m = rm + sm$,
(3) $r(m + m') = rm + rm'$,
(4) $1m = m$

für alle $r, s \in R$, $m, m' \in M$.
Ein *R-Modul-Homomorphismus* $f : {}_RM \longrightarrow {}_RN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $f(rm) = rf(m)$.
Analog definiert man R-Rechts-Moduln M_R.
$\mathrm{Hom}_R(M, N) := \{f : {}_RM \longrightarrow {}_RN | f \text{ ist ein } R\text{-Modul-Homomorphismus}\}$.

Lemma 1.2. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *ist eine abelsche Gruppe durch* $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$.

Beweis: Da N eine abelsche Gruppe ist, ist auch die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(M, N)$ eine abelsche Gruppe. Die Menge der Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Hom}(M, N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Abb}(M, N)$ (gilt nur für *abelsche* Gruppen, MIB). Wir zeigen, daß $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}(M, N)$ ist. Dazu ist nur zu zeigen, daß mit f und g auch $f - g$ ein R-Modul-Homomorphismus ist. Es ist klar, daß $f - g$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Weiter ist $(f - g)(rm) = f(rm) - g(rm) = rf(m) - rg(m) = r(f(m) - g(m)) = r(f - g)(m)$. □

Bemerkung 1.3. Jede abelsche Gruppe ist auf eindeutige Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul.

Beweis: Nach Übung I.1 ist ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ anzugeben.
Es muß $\varphi(1) = \mathrm{id}_M$ gelten. Wir setzen φ in der einzig möglichen Weise fort: $\varphi(n) := \mathrm{id}_M + \ldots + \mathrm{id}_M$ (n-mal, $n \geq 0$) und $\varphi(-n) = -(\mathrm{id}_M + \ldots + \mathrm{id}_M)$ (n-mal, $n > 0$). Dann ist φ ein Ringhomomorphismus. □

Definition 1.4. Sei X eine Menge und R ein Ring. Ein R-Modul RX zusammen mit einer Abbildung, $\iota : X \longrightarrow RX$ heißt ein von X *erzeugter freier R-Modul*, wenn es zu jedem R-Modul M und zu jeder Abbildung $f : X \longrightarrow M$ genau einen R-Modul-Homomorphismus $g : RX \longrightarrow M$ so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & RX \arrow[d, "g"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Lemma 1.5. (RX, ι) *ist durch* X *(und* R*) bis auf Isomorphie von* R*-Moduln eindeutig bestimmt.*

Beweis: folgt aus dem (bekannten) Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "\iota"'] \arrow[dl, "\iota'"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, "\iota'"] & & \\
RX \arrow[r, "h"] & RX' \arrow[rr, "k"] & & RX \arrow[r, "h"] & RX'
\end{tikzcd}$$

□

Satz 1.6. (Rechenregeln für freie R-Moduln) *Sei (RX, ι) ein freier R-Modul über X. Sei $\widetilde{x} := \iota(x) \in RX$ für alle $x \in X$. Dann gelten:*

(1) *$\widetilde{X} = \{\widetilde{x} |\ \exists x \in X : \widetilde{x} = \iota(x)\}$ ist Erzeugendenmenge von RX, d.h. jedes Element $m \in RX$ ist Linearkombination $m = \sum_{i=1}^{n} r_i \widetilde{x}_i$ der $\widetilde{x}$.*

(2) *$\widetilde{X} \subseteq RX$ ist linear unabhängig und ι ist injektiv, d.h. wenn $\sum'_{x \in X} r_x \widetilde{x} = 0$, dann gilt $\forall x \in X : r_x = 0$.*

Beweis: 1. Sei $M := \langle \widetilde{x} | x \in X \rangle \subseteq RX$ der von den $\widetilde{x}$ erzeugte Untermodul. $\Longrightarrow$ Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "0"'] & RX \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\nu"] \\ & RX/M \end{tikzcd}$$

kommutiert mit beiden Abbildungen 0 und ν. $\Longrightarrow 0 = \nu \Longrightarrow RX/M = 0 \Longrightarrow RX = M$.
2. Sei $\sum_{i=0}^{n} r_i \widetilde{x}_i = 0$ und $r_0 \neq 0$. Sei $j : X \longrightarrow R$ Abbildung mit $j(x_0) = 1, j(x) = 0$ für alle $x \neq x_0$. $\Longrightarrow\ \exists g : RX \longrightarrow R$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "j"'] & RX \arrow[d, "g"] \\ & R \end{tikzcd}$$

kommutativ und $0 = g(0) = g(\sum_{i=0}^{n} r_i \widetilde{x}_i) = \sum_{i=0}^{n} r_i g(\widetilde{x}_i) = \sum_{i=0}^{n} r_i j(x_i) = r_0$. Widerspruch $\Longrightarrow$ Behauptung. □

Satz 1.7. *Sei X eine Menge. Dann gibt es einen freien R-Modul (RX, ι) über X.*

Beweis: Offenbar ist $RX := \{\alpha : X \longrightarrow R |$ für fast alle $x \in X : \alpha(x) = 0\}$ ein Untermodul von $\mathrm{Abb}(X, R)$ bei komponentenweiser Addition und Multiplikation. $\iota : X \longrightarrow RX$ sei definiert durch $\iota(x)(y) := \delta_{xy}$. Sei $f : X \longrightarrow M$ eine Abbildung. Sei $\alpha \in RX$. Definiere $g(\alpha) := \sum_{x \in X} \alpha(x) \cdot f(x)$. g ist wohldefiniert, weil nur endlich viele $\alpha(x) \neq 0$. g ist R-Modul-Homomorphismus: $rg(\alpha) + sg(\beta) = r \sum \alpha(x) \cdot f(x) + s \sum \beta(x) \cdot f(x) = \sum (r\alpha(x) + s\beta(x)) \cdot f(x) = \sum (r\alpha + s\beta)(x) \cdot f(x) = g(r\alpha + s\beta)$. Weiter ist $g\iota = f : g\iota(x) = \sum_{y \in X} \iota(x)(y) \cdot f(y) = \sum \delta_{xy} \cdot f(y) = f(x)$. Für $\alpha \in RX$ gilt $\alpha = \sum_{x \in X} \alpha(x)\iota(x)$, denn $\alpha(y) = \sum \alpha(x)\iota(x)(y)$. Um zu zeigen, daß g eindeutig durch f bestimmt ist, sei $h \in \mathrm{Hom}_R(RX, M)$ mit $h\iota = f$. $\Longrightarrow$ $h(\alpha) = h(\sum \alpha(x)\iota(x)) = \sum \alpha(x) h\iota(x) = \sum \alpha(x) f(x) = g(\alpha) \Longrightarrow h = g$. □

Definition 1.8. Seien M_R, ${}_RN$ R-Modul, A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $f : M \times N \longrightarrow A$ heißt *R-bilinear*, wenn

(1) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$,
(2) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$,
(3) $f(mr, n) = f(m, rn)$

für alle $r \in R,\ m, m' \in M,\ n, n' \in N$.
$\mathrm{Bil}_R(M, N; A) := \{f : M \times N \longrightarrow A | f R\text{-bilinear}\}$.

Bemerkung 1.9. $\mathrm{Bil}_R(M, N; A)$ ist eine abelsche Gruppe mit $(f + g)(m, n) := f(m, n) + g(m, n)$.

Definition 1.10. Seien M_R, ${}_RN$ R-Moduln. Eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung

$$\otimes : M \times N \ni (m,n) \mapsto m \otimes n \in M \otimes_R N$$

heißt *Tensorprodukt von M und N über R*, wenn es zu jeder abelschen Gruppe A und zu jeder R-bilinearen Abbildung $f : M \times N \longrightarrow A$ genau einen Gruppenhomomorphismus $g : M \otimes_R N \longrightarrow A$ so gibt, daß

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Elemente von $M \otimes_R N$ heißen *Tensoren*, die Elemente der Form $m \otimes n$ *zerlegbare Tensoren.*
Wichtig: Ein Homomorphismus $f : M \otimes_R N \longrightarrow A$, dessen Quelle ein Tensorprodukt ist, *muß* dadurch definiert werden, daß man eine R-bilineare Abbildung auf $M \times N$ angibt.

Lemma 1.11. *Das Tensorprodukt $(M \otimes_R N, \otimes)$ ist durch M_R, ${}_RN$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis:

$$\begin{tikzcd} & & M \times N \arrow[dll, "\otimes"'] \arrow[dl, "\otimes'"] \arrow[dr, "\otimes"] \arrow[drr, "\otimes'"] & & \\ M \otimes_R N \arrow[r, "h"] & M \otimes'_R N \arrow[rr, "k"] & & M \otimes_R N \arrow[r, "h"] & M \otimes'_R N \end{tikzcd}$$

impliziert $k = h^{-1}$ □

Satz 1.12. (Rechenregeln im Tensorprodukt) *Sei $(M \otimes_R N, \otimes)$ ein Tensorprodukt. Dann gelten*

(1) $M \otimes_R N = \{\sum_i m_i \otimes n_i \mid m_i \in M, n_i \in N\}$,
(2) $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$,
(3) $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$,
(4) $mr \otimes n = m \otimes rn$

für alle $r \in R, m, m' \in M, n, n' \in N$.

Beweis: 1. Sei $B := \langle m \otimes n \rangle \subseteq M \otimes_R N$ die von den zerlegbaren Tensoren erzeugte Untergruppe von $M \otimes_R N$. Sei $A := M \otimes_R N/B$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "0"'] & M \otimes_R N \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\nu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

mit 0 und mit ν. $\Longrightarrow 0 = \nu \Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow B = M \otimes_R N$.
2. $(m + m') \otimes n = \otimes(m + m', n) = \otimes(m, n) + \otimes(m', n) = m \otimes n + m' \otimes n$. Analog zeigt man 3. und 4. □

Satz 1.13. *Seien M_R, ${}_RN$ R-Moduln. Dann gibt es ein Tensorprodukt $(M \otimes_R N, \otimes)$.*

Beweis: Definiere $M \otimes_R N := \mathbb{Z}\{M \times N\}/U$, wobei $\mathbb{Z}\{M \times N\}$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul über $M \times N$ ist (die freie abelsche Gruppe) und U erzeugt wird von

$\iota(m+m',n)-\iota(m,n)-\iota(m',n)$
$\iota(m,m+n')-\iota(m,n)-\iota(m,n')$
$\iota(mr,n)-\iota(m,rn)$

für alle $r \in R$, $m,m' \in M$, $n,n' \in N$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "\psi"'] & \mathbb{Z}\{M \times N\} \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\rho"] & M \otimes_R N = \mathbb{Z}\{M \times N\}/U \arrow[d, "g"] \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

Sei ψ gegeben. Es gibt genau ein $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\{M\times N\},A)$ mit $\rho\iota=\psi$. Wegen $\rho(\iota(m+m',n)-\iota(m,n)-\iota(m'n)) = \psi(m+m',n)-\psi(m,n)-\psi(m',n)=0$, weil ψ R-bilinear ist, und wegen $\rho(\iota(m,n+n')-\iota(m,n)-\iota(m,n'))=0$ und $\rho(\iota(mr,n)-\iota(m,rn))=0$ gilt $\rho(U)=0 \Longrightarrow$ Es gibt genau ein $g \in \mathrm{Hom}(M\otimes_R N, A)$ mit $g\nu=\rho$ (Homomorphiesatz). Sei $\otimes := \nu\iota$. $\otimes$ ist bilinear, denn $(m+m')\otimes n = \nu\iota(m+m',n) = \nu(\iota(m+m',n)) = \nu(\iota(m+m',n)-\iota(m,n)-\iota(m',n)+\iota(m,n)+\iota(m',n)) = \nu(\iota(m,n)+\iota(m',n)) = \nu\iota(m,n)+\nu\iota(m',n) = m\otimes n + m'\otimes n$. Analog zeigt man die beiden weiteren Eigenschaften.
Zu zeigen bleibt, daß $(M\otimes_R N,\otimes)$ ein Tensorprodukt bildet. Aus dem obigen Diagramm sieht man, daß es zu jeder abelschen Gruppe A und zu jeder R-bilinearen Abbildung $\psi : M\times N \longrightarrow A$ ein $g\in \mathrm{Hom}(M\otimes_R N,A)$ gibt mit $g\otimes = \psi$. Sei $h \in \mathrm{Hom}(M\otimes_R N,A)$ mit $h\otimes=\psi$. $\Longrightarrow h\nu\iota=\psi \Longrightarrow h\nu=\rho=g\nu \Longrightarrow g=h$. □

Definition 1.14. Seien R,S Ringe, M ein R-Links-Modul und ein S-Rechts-Modul. M heißt *R-S-Bimodul*, wenn $(rm)s=r(ms)$. Wir definieren $\mathrm{Hom}_{R\text{-}S}(M,N) := \mathrm{Hom}_R(M,N)\cap \mathrm{Hom}_S(M,N)$.

Satz und Definition 1.15. *Seien $f\in \mathrm{Hom}_R(M.,M'.)$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(.N,.N')$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus*

$$f\otimes_R g \in \mathrm{Hom}(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')$$

mit $f\otimes_R g(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n)$, d.h. es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f\times g"'] & M\otimes_R N \arrow[d, "f\otimes_R g"] \\
M'\times N' \arrow[r, "\otimes"'] & M'\otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

Beweis: $\otimes(f\times g)$ ist bilinear. □

Lemma 1.16. *Sei M_S ein S-Rechts-Modul und $R\times M \longrightarrow M$ eine Abbildung. M ist genau dann ein R-S-Bimodul, wenn*

(1) $\forall r\in R : (M \ni m \mapsto rm \in N) \in \mathrm{Hom}_S(M.,N.)$,
(2) $\forall r,r' \in R, m\in M : (r+r')m = rm+r'm$,
(3) $\forall r,r' \in R, m \in M : (rr')m = r(r'm)$,
(4) $\forall m \in M : 1m = m$.

Beweis: $r(m+m') = rm+rm'$; $r(ms)=(rm)s$. □

Lemma 1.17. *Seien ${}_RM_S$, ${}_SN_T$ Bimoduln. Dann ist ${}_R(M\otimes_S N)_T$ ein Bimodul durch $r(m\otimes n) := rm\otimes n, (m\otimes n)t := m\otimes nt$.*

Beweis: Offenbar gelten 2.-4. . $(r\otimes_S \mathrm{id})(m\otimes n) = rm\otimes n = r(m\otimes n)$ ist ein Homomorphismus. $\square$

Folgerung 1.18. *Seien ${}_RM_S$, ${}_SN_T$, ${}_RM'_S$, ${}_SN'_T$ Bimoduln und $f \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}S}(.M.,.M'.)$, $g \in \mathrm{Hom}_{S\text{-}T}(.N.,.N'.)$. Dann ist $f \otimes_S g \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}T}(.M \otimes_S N.,.M' \otimes_S N'.)$.*

Beweis: $f \otimes_S g(rm \otimes nt) = f(rm) \otimes g(nt) = r(f \otimes_S g)(m \otimes n)t$. $\square$

Definition 1.19. Eine (endliche oder unendliche) Folge von Homomorphismen

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

heißt ein *Komplex*, wenn für alle $i \in I$ gilt $f_i f_{i-1} = 0$ (oder äquivalent dazu $\mathrm{Bi}(f_{i-1}) \subseteq \mathrm{Ke}(f_i)$).
Ein Komplex heißt *exakt*, wenn für alle $i \in I$ gilt $\mathrm{Bi}(f_{i-1}) = \mathrm{Ke}(f_i)$.

Lemma 1.20. *Ein Komplex*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

ist genau dann exakt, wenn die Folgen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_{i-1}) \longrightarrow M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i) \longrightarrow 0$$

für alle $i \in I$ exakt sind, genau dann wenn die Folgen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_{i-1}) \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_i) \longrightarrow 0$$

für alle $i \in I$ exakt sind.

Beweis: Offenbar sind die Folgen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_i) \longrightarrow M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i) \longrightarrow 0$$

exakt, denn $\mathrm{Ke}(f_i) \longrightarrow M_i$ ist ein Monomorphismus, $M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i)$ ist ein Epimorphismus und der Kern von $M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i)$ ist $\mathrm{Ke}(f_i)$.
Die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_{i-1}) \longrightarrow M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i) \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn $\mathrm{Bi}(f_{i-1}) = \mathrm{Ke}(f_i)$ gilt.
Die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_{i-1}) \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_i) \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn $M_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Ke}(f_i)$ surjektiv ist, genau dann wenn $\mathrm{Bi}(f_{i-1}) = \mathrm{Ke}(f_i)$ gilt. $\square$

2. Darstellbare Funktoren

Definition 2.1. $\mathcal{C}$ besteht aus

(1) einer Klasse, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, deren Elemente $A, B, C, \ldots \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *Objekte* heißen,
(2) einer Familie $\{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) | A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\}$ von paarweise disjunkten Mengen, deren Elemente $f, g, \ldots \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *Morphismen* heißen, und
(3) einer Familie $\{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \ni (f,g) \mapsto gf \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) | A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\}$ von Abbildungen, die *Verknüpfungen* heißen.

$\mathcal{C}$ heißt eine *Kategorie*, wenn für $\mathcal{C}$ folgende Axiome gelten

(1) Assoziativ-Gesetz:
$\forall A, B, C, D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C), h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D):$

$$h(gf) = (hg)f;$$

(2) Identität:
$\forall A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\ \exists 1_A \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)\ \forall B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C},\ \forall f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B),\ \forall g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C,A)$:

$$1_A g = g \qquad \text{und} \qquad f 1_A = f.$$

Beispiel 2.2. 1. Kategorie der Mengen **Me**.
2. R-Moduln R-**Mod**, k-Vektorräume k-**Vek** oder k-**Mod**, Gruppen **Gr**, abelsche Gruppen **Ab**, Monoide **Mon**, kommutative Monoide **cMon**, Ringe **Ri**, Körper **Kö**, topologische Räume **Top**.

Schreibweise 2.3. $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ wird auch als $f : A \longrightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ geschrieben. A heißt *Quelle*, B *Ziel* von f.

Definition 2.4. $f : A \longrightarrow B$ heißt *Isomorphismus*, wenn $g : B \longrightarrow A$ in $\mathcal{C}$ existiert mit $fg = 1_B$, $gf = 1_A$. Der Morphismus g ist durch f eindeutig bestimmt, denn $g' = g'fg = g$.

Schreibweise 2.5. $g =: f^{-1}$. A heißt *isomorph* zu B, wenn ein Isomorphismus $f : A \longrightarrow B$ existiert. Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Isomorphismus. Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Isomorphismen in $\mathcal{C}$, so ist auch $gf : A \longrightarrow C$ ein Isomorphismus. Es gelten: $(f^{-1})^{-1} = f$ und $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Die Isomorphie zwischen Objekten ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 2.6. In den Kategorien **Me**, R-**Mod**, k-**Vek**, **Gr**, **Ab**, **Mon**, **cMon**, **Ri**, **Kö** sind die Isomorphismen genau die bijektiven Morphismen. In **Top** sind $M = \{a, b\}$ mit $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ und mit $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, M\}$ topologische Räume. Dann ist $f = \mathrm{id} : (M, \mathfrak{T}_1) \longrightarrow (M, \mathfrak{T}_2)$ bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung ist jedoch nicht stetig, also ist f kein Isomorphismus (Homöomorphismus).

Definition 2.7. 1.)$f : A \longrightarrow B$ heißt ein *Monomorphismus*, wenn $\forall C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C},\ \forall g, h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$:

$$fg = fh \Longrightarrow g = h \quad (f \text{ ist links-kürzbar}).$$

2.) $f : A \longrightarrow B$ heißt ein *Epimorphismus*, wenn $\forall C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C},\ \forall g, h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$:

$$gf = hf \Longrightarrow g = h \quad (f \text{ ist rechts-kürzbar}).$$

Definition 2.8. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. $\mathcal{F}$ bestehe aus

(1) einer Abbildung $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \ni A \mapsto \mathcal{F}(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$,
(2) einer Familie von Abbildungen

$$\{\mathcal{F}_{A,B} : \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \mapsto \mathcal{F}_{A,B}(f) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) | A, B \in \mathcal{C}\}$$
$$[\text{oder } \{\mathcal{F}_{A,B} : \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \mapsto \mathcal{F}_{A,B}(f) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)) | A, B \in \mathcal{C}\}]$$

$\mathcal{F}$ heißt ein *kovarianter* [*kontravarianter*] *Funktor*, wenn

(1) $\mathcal{F}_{A,A}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$,
(2) $\mathcal{F}_{A,C}(gf) = \mathcal{F}_{B,C}(g)\mathcal{F}_{A,B}(f)$ für alle $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.
$[\mathcal{F}_{A,C}(gf) = \mathcal{F}_{A,B}(f)\mathcal{F}_{B,C}(g)$ für alle $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}]$.

Schreibweise:

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathcal{C} & \text{statt} & A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \\ f \in \mathcal{C} & \text{statt} & f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \\ \mathcal{F}(f) & \text{statt} & \mathcal{F}_{A,B}(f). \end{array}$$

Beispiele 2.9. (1) Id : **Me** $\longrightarrow$ **Me**
(2) Vergiß: R-**Mod** $\longrightarrow$ **Me**
(3) Vergiß: **Ri** $\longrightarrow$ **Ab**
(4) Vergiß: **Ab** $\longrightarrow$ **Gr**

(5) $\mathcal{P} : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}, \mathcal{P}(M) :=$ Potenzmenge von M. $\mathcal{P}(f)(X) := f^{-1}(X)$ für $f : M \longrightarrow N, X \subseteq N$ ist ein kontravarianter Funktor.
(6) $\mathcal{Q} : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}, \mathcal{Q}(M) :=$ Potenzmenge von M. $\mathcal{Q}(f)(X) := f(X)$ für $f : M \longrightarrow N, X \subseteq M$ ist ein kovarianter Funtor.

Lemma 2.10. (1) *Für $X \in \mathcal{C}$ ist*

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Me}$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni f \mapsto Mor_{\mathcal{C}}(X', f) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A), \mathrm{Mor}_{C}(X, B)),$$

mit $\mathrm{Mor}_C(X, f) : \mathrm{Mor}_C(X, A) \ni g \mapsto fg \in \mathrm{Mor}_C(X, B)$, *also* $\mathrm{Mor}_C(X, f)(g) = fg$, *ein kovarianter Funktor* $\mathrm{Mor}_C(X, -)$.
(2) *Für $X' \in C$ ist*

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Me}$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni f \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, X) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, X), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X))$$

mit $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, X) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, X) \ni g \mapsto gf \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)$, *also* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, X)(g) = gf$, *ein kontravarianter Funktor* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$.

Beweis: (1) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, 1_A)(g) = 1_A g = g = \mathrm{id}(g)$, $\mathrm{Mor}_C(X, f)\,\mathrm{Mor}_C(X, g)(h) = fgh = \mathrm{Mor}_C(X, fg)(h)$
(2) analog.

□

Definition 2.11. Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Ein *funktorieller Morphismus* oder eine *natürliche Transformation* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist eine Familie von Morphismen $\{\varphi(A) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A) | A \in \mathcal{C}\}$, so daß für alle $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ gilt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\varphi(B)"'] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, d.h. $\mathcal{G}(f)\varphi(A) = \varphi(B)\mathcal{F}(f)$.

Lemma 2.12. *Seien $\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathbf{Me}} : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}$ und*

$$\mathcal{G} = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(-, A), A) : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}$$

für eine Menge A. Dann ist $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ mit

$$\varphi(B) : B \ni b \mapsto (\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(B, A) \ni f \mapsto f(b) \in A) \in \mathcal{G}(B)$$

ein funktorieller Morphismus.

Beweis: Sei $g : B \longrightarrow C$ gegeben. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi(B)"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(B, A), A) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(g, A), A)"] \\ C \arrow[r, "\varphi(C)"] & \mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(C, A), A) \end{tikzcd}$$

denn

$$\begin{aligned} \varphi(C)\mathcal{F}(g)(b)(f) &= \varphi(C)g(b)(f) = fg(b) = \varphi(B)(b)(fg) \\ &= [\varphi(B)(b)\,\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(g, A)](f) = [\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(\mathrm{Mor}_{\mathbf{Me}}(g, A), A)\varphi(B)(b)](f). \end{aligned}$$

□

Definition 2.13. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Me}$ ein kovarianter Funktor. Ein Paar (A, x) mit $A \in \mathcal{C}, x \in \mathcal{F}(A)$ heißt ein *darstellendes (generisches, universelles) Objekt* für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ heißt dann ein darstellbarer Funktor, wenn zu jedem $B \in \mathcal{C}$ und $y \in \mathcal{F}(B)$ genau ein $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ mit $\mathcal{F}(f)(x) = y$ existiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(A) \ni x \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[d, mapsto, shift left=6] \\
B & \mathcal{F}(B) \ni y
\end{tikzcd}$$

Satz 2.14. *Seien (A, x) und (B, y) darstellende Objekte für $\mathcal{F}$. Dann existiert genau ein Isomorphismus $f : A \longrightarrow B$ mit $\mathcal{F}(f)(x) = y$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "1_A"'] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}(h)"'] \arrow[dd, bend left=60, "1_{\mathcal{F}(A)}"] & x \arrow[d, mapsto] \\
B \arrow[d, "k"] \arrow[dd, bend right=60, "1_B"'] & \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(k)"'] \arrow[dd, bend left=60, "1_{\mathcal{F}(B)}"] & y \arrow[d, mapsto] \\
A \arrow[d, "h"] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}(h)"'] & x \arrow[d, mapsto] \\
B & \mathcal{F}(B) & y
\end{tikzcd}$$

Beispiele 2.15. (1) Sei $X \in \mathbf{Me}$ und sei R ein Ring. $\mathcal{F} : R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Me}$, $\mathcal{F}(M) := \mathrm{Abb}(X, M)$ ist ein kovarianter Funktor. Ein darstellendes Objekt für $\mathcal{F}$ ist gegeben durch $(RX, x : X \longrightarrow RX)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $(M, y : X \longrightarrow M)$ genau ein $f \in \mathrm{Hom}_R(RX, M)$ existiert mit $\mathcal{F}(f)(x) = \mathrm{Abb}(X, f)(x) = xf = y$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"'] & RX \arrow[d, "f"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

(2) Seien M_R, ${}_RN$ gegeben. $\mathcal{F} : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Me}$, $\mathcal{F}(A) := \mathrm{Bil}_R(M, N; A)$, ist ein kovarianter Funktor. Ein darstellendes Objekt für $\mathcal{F}$ ist gegeben durch $(M \otimes_R N, \otimes : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $(A, f : M \times N \longrightarrow A)$ genau ein $g \in \mathrm{Hom}(M \otimes_R N, A)$ existiert mit $\mathcal{F}(g)(\otimes) = \mathrm{Bil}_R(M, N; g)(\otimes) = g\otimes = f$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "g"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Satz 2.16. *$\mathcal{F}$ besitzt genau dann ein darstellendes Objekt (A, a), wenn es einen funktoriellen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ gibt (mit $a = \varphi(A)^{-1}(1_A)$).*

Beweis: $\Longrightarrow$: Die Abbildung

$$\varphi(B) : \mathcal{F}(B) \ni y \mapsto f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \text{ mit } \mathcal{F}(f)(a) = y$$

ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\psi(B) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \mapsto \mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}(B).$$

Es ist nämlich $y \mapsto f \mapsto \mathcal{F}(f)(a) = y$ und $f \mapsto y := \mathcal{F}(f)(a) \mapsto g : \mathcal{F}(g)(a) = y = \mathcal{F}(f)(a)$. Wegen der Eindeutigkeit folgt $f = g$. Also sind alle $\varphi(B)$ bijektiv mit inverser Abbildung $\psi(B)$. Es genügt zu zeigen, daß ψ ein funktorieller Morphismus ist. Sei dazu $g : B \longrightarrow C$ gegeben. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\psi(B)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,g)"'] & \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\psi(C)"'] & \mathcal{F}(C)
\end{tikzcd}$$

denn es gilt $\psi(C)\,\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,g)(f) = \psi(C)(gf) = \mathcal{F}(gf)(a) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)(a) = \mathcal{F}(g)\psi(B)(f)$.
$\Longrightarrow$: Sei A gegeben. Setze $a := \varphi(A)^{-1}(1_A)$. Sei $y \in \mathcal{F}(B)$. Dann ist $y = \varphi(B)^{-1}(f) = \varphi(B)^{-1}(f 1_A) = \varphi(B)^{-1}\,\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,f)(1_A) = \mathcal{F}(f)\varphi(A)^{-1}(1_A) = \mathcal{F}(f)(a)$ für ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$. $\square$

Satz 2.17. *Seien zu jedem $X \in \mathcal{D}$ ein darstellbarer Funktor $\mathcal{F}_X : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Me** und zu jedem $g : X \longrightarrow Y$ ein funktorieller Morphismus $\mathcal{F}_g : \mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_X$ (kontravariant!) gegeben, sodaß $\mathcal{F}$ von X funktoriell abhängt: $\mathcal{F}_{1_X} = 1_{\mathcal{F}_X}, \mathcal{F}_{hg} = \mathcal{F}_g\mathcal{F}_h$. Dann hängen die darstellenden Objekte (A_X, a_X) für $\mathcal{F}_X$ funktoriell von X ab: zu jedem $g : X \longrightarrow Y$ gibt es genau einen Homomorphismus $A_g : A_X \longrightarrow A_Y$ (mit $\mathcal{F}_X(A_g)(a_X) = \mathcal{F}_g(A_Y)(a_Y)$), und es gelten $A_{1_X} = 1_{A_X}, A_{hg} = A_h A_g$.*

Beweis: Wir wählen für jedes $X \in \mathcal{C}$ (per Auswahlaxiom) ein darstellendes Objekt (A_X, a_X) für $\mathcal{F}_X$ aus. Dann gibt es für $g : X \longrightarrow Y$ genau einen Morphismus $A_g : A_X \longrightarrow A_Y$ mit

$$\mathcal{F}_X(A_g)(a_X) = \mathcal{F}_g(A_Y)(a_Y) \in \mathcal{F}_X(A_Y),$$

weil $\mathcal{F}_g(A_Y) : \mathcal{F}_Y(A_Y) \longrightarrow \mathcal{F}_X(A_Y)$ gegeben ist. Es ist $\mathcal{F}_X(A_1)(a_X) = \mathcal{F}_1(A_X)(a_X) = a_X = \mathcal{F}_X(1)(a_X)$, also $A_1 = 1$, und $\mathcal{F}_X(A_{hg})(a_X) = \mathcal{F}_{hg}(A_Z)(a_Z) = \mathcal{F}_g(A_Z)\mathcal{F}_h(A_Z)(a_Z) = \mathcal{F}_g(A_Z)\mathcal{F}_Y(A_h)(a_Y) = \mathcal{F}_X(A_h)\mathcal{F}_g(A_Y)(a_Y) = \mathcal{F}_X(A_h)\mathcal{F}_X(A_g)(a_X) = \mathcal{F}_X(A_h A_g)(a_X)$, also $A_h A_g = A_{hg}$ für $g : X \longrightarrow Y$ und $h : Y \longrightarrow Z$ in $\mathcal{D}$. $\square$

Folgerung 2.18. (1) $\mathrm{Abb}(X,M) \cong \mathrm{Hom}_R(RX, M)$ *funktoriell in M (und X!). Insbesondere ist* **Me** $\ni X \mapsto RX \in R$-**Mod** *ein Funktor.*
(2) $\mathrm{Bil}_R(M,N;A) \cong \mathrm{Hom}(M \otimes_R N, A)$ *funktoriell in A (und $(M,N) \in$ **Mod**-$R \times R$-**Mod**). Insbesondere ist* **Mod**-$R \times R$-**Mod** $\ni M,N \mapsto M \otimes_r N \in$ **Ab** *ein Funktor.*
(3) R-**Mod**-$S \times S$-**Mod**-$T \ni (M,N) \mapsto M \otimes_S N \in R$-**Mod**-$T$ *ist ein Funktor.*

Lemma 2.19. *Sei $I_R \subseteq R_R$ ein Ideal und $_RM$ ein R-Modul. Dann ist*

$$M/IM \cong R/I \otimes_R M$$

funktoriell in M.

Beweis: Wir geben die zueinander inversen Abbildungen an durch $\overline{m} \mapsto \overline{1} \otimes m$ und $\overline{r} \otimes m \mapsto \overline{rm}$. Wir überlassen das Nachprüfen der Wohldefiniertheit, der Isomorphieeigenschaft und die Funktorialität dem Leser als Übung. $\square$

Lemma 2.20. *Seien ${}_RM_S$; ${}_RN_T$ Bimoduln. Dann ist ${}_S\operatorname{Hom}_R(.M_S, .N_T)_T$ ein Bimodul durch* $(sft)(m) := f(ms)t$

Beweis: trivial bis auf

$$((ss')f(tt'))(m) = f(m(ss'))(tt') = (f((ms)s')t)t' = (s'ft)(ms)t' = (s(s'ft)t')(m).$$

□

Folgerung 2.21. (1) *${}_RM_S$ Bimodul $\Longrightarrow$ ${}_S\operatorname{Hom}_R(.M_S, \text{-}) : R$-**Mod** $\longrightarrow S$-**Mod** ist kovarianter Funktor.*
(2) *${}_RM_S$ Bimodul $\Longrightarrow$ $\operatorname{Hom}_R(\text{-}, .M_S)_S : R$-**Mod** $\longrightarrow$ **Mod**-S ist ein kontravarianter Funktor.*
(3) *${}_RM_S$ Bimodul $\Longrightarrow$ ${}_S\operatorname{Hom}_R(.M_S, .\text{-}_T)_T : R$-**Mod**-$T \longrightarrow S$-**Mod**-$T$ ist ein kovarianter Funktor.*

Ohne Beweis. □

Satz 2.22. *Seien ${}_RM_S$, ${}_SN_T$, ${}_RP_U$ Bimoduln. Dann ist*

$${}_T\operatorname{Hom}_R(.M \otimes_S N_T, .P_U) \cong {}_T\operatorname{Hom}_S(.\operatorname{Hom}_R(.M_S, .P_U)_U)_U$$

mit $f \mapsto \widetilde{f}$ und $\widetilde{f}(n)(m) = f(m \otimes n)$ ein in M, N, P funktorieller Isomorphismus von T-U-Bimoduln.
Symmetrisch gilt für ${}_UP_T$

$${}_U\operatorname{Hom}_T({}_RM \otimes_S N., {}_UP.)_R \cong {}_U\operatorname{Hom}_S({}_RM., {}_U\operatorname{Hom}_T({}_SN., {}_UP.).)_R.$$

Beweis: 1. Möglichkeit: Man zeigt, daß $\operatorname{Hom}_R(.M \otimes_S N, .P) \cong S\text{-}\operatorname{Bil}_R(.M, N; .P)$ und $S\text{-}\operatorname{Bil}_R(.M, N; .P) \cong \operatorname{Hom}_S(.N, .\operatorname{Hom}_R(.M_S, .P))$ funktoriell in M, N, P gilt und prüft die T-U-Linearität.
2. Möglichkeit: Man zeigt, daß

$${}_T\operatorname{Hom}_R(.M \otimes_S N_T, .P_U)_U \ni f \mapsto \widetilde{f} \in {}_T\operatorname{Hom}_S(.N_T, .\operatorname{Hom}_R(.M_S, P_U)_U)_U$$

mit $\widetilde{f}(n)(m) = f(m \otimes n)$ die gewünschten Eigenschaften hat.
Beweis als Übung. □

Satz 2.23. *Sei (RX, ι) ein freier R-Modul, ${}_SM_R$ ein Bimodul. Dann läßt sich jedes Element $u \in M \otimes_R RX$ eindeutig darstellen als $u = \sum_{x \in X} m_x \otimes \iota(x)$.*

Beweis: $RX \ni \alpha = \sum_{x \in X} r_x \iota(x)$ ist das allgemeine Element von RX. Also gilt $u = \sum m_i \otimes \alpha_i = \sum m_i \otimes \sum r_{x,i}\iota(x) = \sum_i \sum_x m_i r_{x,i} \otimes \iota(x) = \sum_x (\sum_i m_i r_{x,i}) \otimes \iota(x)$. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\sum_{y \in X} m_y \otimes \iota(y) = 0$. Sei $x \in X$ und $f_x : RX \longrightarrow P$ definiert durch $f_x(\iota(y)) = \delta_{xy}$. $\Longrightarrow$ $(1_M \otimes_R f_x)(\sum m_y \otimes \iota(y)) = \sum m_y \otimes f_x(\iota(y)) = m_x \otimes 1 = 0$ für alle $x \in X$. Sei weiter

$$\begin{tikzcd} M \times R \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\text{mult}"'] & M \otimes_R R \arrow[d, "\mu"] \\ & M \end{tikzcd}$$

gegeben. $\Longrightarrow \mu(m_x \otimes 1) = m_x \cdot 1 = m_x = 0 \Longrightarrow$ Eindeutigkeit. Übung: Man zeige, daß μ ein Isomorphismus ist. □

Folgerung 2.24. *Seien ${}_SM_R$, ${}_RN$ (Bi-)Moduln. Sei M freier S-Modul über Y, N freier R-Modul über X. Dann ist $M \otimes_R N$ freier $S.$Modul über $Y \times X$.*

Beweis: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \times X \arrow[r, "\iota_Y \times \iota_X"] \arrow[drr, "f"'] & M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g"'] & {}_S M \otimes_R N \arrow[d, "h"] \\
& & {}_S U
\end{tikzcd}$$

Sei f gegeben. Wir definieren für alle $x \in X$ ein $g(\text{-}, x) \in \operatorname{Hom}_S(.M, .U)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\iota_Y"] \arrow[dr, "f(\text{-},x)"'] & {}_S M \arrow[d, "g(\text{-},x)"] \\
& {}_S U
\end{tikzcd}$$

Weiter sei $\widetilde{g} \in \operatorname{Hom}_R(.N, .\operatorname{Hom}_S(.M_R, .U))$ definiert durch

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_x"] \arrow[dr, "g(\text{-},\text{-})"'] & {}_R N \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\
& {}_R \operatorname{Hom}_S(.M_R, .U)
\end{tikzcd}$$

mit $x \mapsto g(\text{-}, x)$. Dann gilt $g(m, n) := \widetilde{g}(n)(m) =: h(m \otimes n)$, denn g ist additiv in m und in n, weil es $\widetilde{g}$ ist, und g ist R-bilinear, weil $g(mr, n) = \widetilde{g}(n)(mr) = (r\widetilde{g}(n))(m) = \widetilde{g}(rn)(m) = g(m, rn)$. Offenbar ist $g(y, x) = f(y, x)$, also ist $h \circ \otimes \circ \iota_Y \times \iota_X = f$. Weiter ist $h(sm \otimes n) = \widetilde{g}(n)(sm) = s(\widetilde{g}(n)(m)) = sh(m \otimes n)$, also ist $h \in S$-**Mod**.
Sei $k \in S$-**Mod** mit $k \circ \otimes \circ \iota_Y \times \iota_X = f$, so ist $k \circ \otimes(\text{-}, x) = g(\text{-}, x)$, weil $k \circ \otimes$ im 1. Argument S-linear ist. Damit ist $k \circ \otimes(m, n) = \widetilde{g}(n)(m) = h(m \otimes n)$, also $h = k$. □

3. Projektive Moduln und Generatoren

Definition 3.1. (1) Sei $(M_i | i \in I)$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt $\prod M_i$ zusammen mit einer Familie $(p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j | j \in I)$ heißt *(direktes) Produkt* der M_i, wenn zu jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ und zu jeder Familie von Morphismen $(f_j : A \longrightarrow M_j | j \in I)$ genau ein Morphismus $f : A \longrightarrow \prod M_i$ existiert, so daß

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod M_i \arrow[r, "p_j"'] & M_j
\end{tikzcd}$$

für alle $j \in I$ kommutieren.

(2) „Der duale Begriff heißt Koprodukt“: Sei $(M_i | i \in I)$ eine Familie von Objekten in $\mathcal{C}$. Ein Objekt $\coprod M_i$ zusammen mit einer Familie $(\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod M_i | j \in I)$ heißt *Koprodukt (direkte Summe)* der M_i, wenn zu jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ und zu jeder Familie $(f_j : M_j \longrightarrow A | j \in I)$ genau ein Morphismus $f : \coprod M_j \longrightarrow A$ existiert, so

daß

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \coprod M_i \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

für alle $j \in I$ kommutieren.

Lemma 3.2. *Produkte und Koprodukte sind bis auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis: analog zu 1.5. □

Satz 3.3. (Rechenregeln in Produkten in R-**Mod**) *Sei $(\prod M_i, (p_j))$ ein Produkt der Familie von Moduln $(M_i)_{i\in I}$. Sei $(a_i \in M_i | i \in I)$ eine Familie von Elementen. Dann gibt es genau ein $a \in \prod M_i$, so daß $p_i(a) = a_i$ für alle $i \in I$. Ist $(b_i \in M_i | i \in I)$ eine weitere Familie mit $b \in \prod M_i$ und $p_i(b) = b_i$, so ist $a + b$ dasjenige Element aus $\prod M_i$, das $p_i(a + b) = a_i + b_i$ für alle $i \in I$ erfüllt.*
Zu jedem $a \in \prod M_i$ gibt es genau eine Familie $(a_i | i \in I)$ mit $p_i(a) = a_i$.

Beweis: Sei $(a_i | i \in I)$ gegeben. Bilde $\varphi_i : \{1\} \longrightarrow M_i$ mit $\varphi_i(1) = a_i$ für alle $i \in I$. Seien $g_i \in \mathrm{Hom}_R(R, M_i)$, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & R \arrow[d, "g_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

kommuntieren. Dann gibt es genau ein $g : R \longrightarrow \prod M_i$ mit

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\ \prod M_i \arrow[r, "p_j"'] & M_j \end{tikzcd}$$

für alle $i \in I$. Der Homomorphismus g ist vollständig und eindeutig bestimmt durch $g(1) =: a$ und das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\varphi_j"'] & R \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend left=60, "g_j"] \\ & \prod M_i \arrow[d, "p_j"] \\ & M_j \end{tikzcd}$$

wobei $p_j(a) = \varphi_j(1) = a_j$.
Da a durch $p_j(a) = a_j$ eindeutig bestimmt ist, gilt $p_j(a + b) = p_j(a) + p_j(b) = a_i + b_j$. Die letzte Aussage ist klar. □

Bemerkung 3.4. Diese Konstruktion ist immer dann durchführbar, wenn es ein freies Objekt R über $\{1\}$ in $\mathcal{C}$ gibt, d.h. wenn es einen Vergißfunktor $V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Me}$ gibt und wenn

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

eine universelle Lösung hat, d.h. wenn der Funktor $\mathrm{Abb}(\{1\}, V(x)) \cong V(x)$ darstellbar ist. Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen den Familien von Elementen $a_i \in V(M_i)$ und den Elementen $V(\prod M_i)$.

Satz 3.5. (Rechenregeln für Koprodukte in R-**Mod**) *Die Abbildungen $\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod M_i$ sind injektive Homomorphismen. Zu jedem Element $a \in \coprod M_i$ gibt es endlich viele $a_i \in M_i$ mit $a = \sum_{i=1}^n \iota_i(a_i)$. Die $a_i \in M_i$ sind durch a eindeutig bestimmt.*

Beweis: Bilde $f_i : M_i \longrightarrow M_j$ durch

$$f_i = \begin{cases} \mathrm{id}, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod M_j \arrow[d, "f"] \\ & M_j \end{tikzcd}$$

definiert einen eindeutig bestimmten Homomorphismus f. Für $i = j$ gilt dann $f\iota_i = \mathrm{id}_{M_i}$, also ist ι_i injektiv.
Bilde $\widetilde{M} := \sum \iota_j(M_j) \subseteq \coprod M_j \Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "0"'] & \coprod M_j \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\nu"] \\ & \coprod M_j/\widetilde{M} \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow \nu = 0 \Longrightarrow \widetilde{M} = \coprod M_j$. Sei $a = \sum \iota_j(a_j)$. Bilde f wie oben. Dann gilt $f(a) = f(\sum \iota_j(a_j)) = \sum f\iota_j(a_j) = \sum f_j(a_j) = a_i$, also sind die a_i durch a eindeutig bestimmt. $\square$

Lemma 3.6. *In der Kategorie* **Me** *der Mengen existieren Produkte und Koprodukte.*

Beweis: Man definiere $\prod M_i := \{\alpha : I \longrightarrow \cup_{i\in I} M_i | \ \forall j \in I : \alpha(j) \in M_j\}$ und $p_j : \prod M_i \rightarrow M_j$, $p_j(\alpha) = \alpha(j)$. Dann verifiziert man leicht die Produkteigenschaft.
Man definiere $\coprod M_i := \dot{\bigcup}_{i\in I} M_i$ (disjunkte Vereinigung) und $\iota_j : M_j \longrightarrow \dot{\bigcup} M_i$ mit $\iota_j(m_j) = m_j$. $\square$

Übung 3.1. Dieses bildet ein Koprodukt in **Me**.

Satz 3.7. (1) *Sei $(M_i | i \in I)$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ gegeben. Wenn das Produkt $(\prod M_i, (p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j))$ existiert, dann ist $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow$* $\mathbf{Me}$, *$\mathcal{F}(N) := \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(N, M_i)$ ein kontravarianter darstellbarer Funktor und $(\prod M_i, (p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j))$ ist ein darstellendes Objekt für $\mathcal{F}$.*

(2) *Sei* $(M_i|i \in I)$ *in einer Kategorie* $\mathcal{C}$ *gegeben. Wenn das Koprodukt* $(\coprod M_i, (\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod M_i))$ *existiert, dann ist* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Me}$, $\mathcal{F}(N) := \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M_i, N)$ *ein kovarianter darstellbarer Funktor und* $(\coprod M_i, (\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod M_i))$ *ein darstellendes Objekt für* $\mathcal{F}$.

Beweis: 1. $\forall A, (f_j : A \longrightarrow M_j) \in \mathcal{F}(A)\ \exists_1 f : A \longrightarrow \prod M_i\ \forall j \in I : p_j f = f_j$. Da $(f_j) \in \mathcal{F}(A) = \prod_i \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M_i)$, gibt es genau ein $f : A \longrightarrow \prod M_i$ mit $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(f)((p_j)) = (\prod \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, M_j)(p_j)) = (p_j f) = (f_j) = y$.
2. $\forall A, (f_j : M_j \longrightarrow A) \in \mathcal{F}(A)\ \exists_1 f : \coprod M_j \longrightarrow A\ \forall j \in I : f\iota_j = f_j$. Da $(f_j) \in \mathcal{F}(A) = \prod_i \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M_i, A)$, gibt es genau ein $f : \coprod M_i \longrightarrow A$ mit $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(f)((\iota_j)) = (\prod \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M_j, f))(\iota_j) = (f_j) = y$. $\square$

Satz 3.8. (1) *In* R-**Mod** *existieren (direkte) Produkte.*
(2) *In* R-**Mod** *existieren Koprodukte oder direkte Summen.*

Beweis: 1. Man definiere $\prod M_i := \{\alpha : I \longrightarrow \cup_{i\in I} M_i |\ \forall j \in I : \alpha(j) \in M_j\}$ und $p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$, $p_j(\alpha) = \alpha(j) \in M_j$. Man prüft leicht nach, daß $\prod M_i$ ein R-Modul mit komponentenweisen Operationen ist und daß die p_j Homomorphismen sind. Ist $(f_j : A \longrightarrow M_j)$ eine Familie von Homomorphismen, so gibt es genau eine Abbildung $f : A \longrightarrow \prod M_i$, so daß $p_j f = f_j$ für alle $j \in I$ gilt (vgl. 3.6). Die folgenden Familien sind gleich: $(p_j f(a+b)) = (f_j(a+b)) = (f_j(a) + f_j(b)) = (p_j f(a) + p_j f(b)) = (p_j(f(a) + f(b)))$, also ist $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Analog sieht man $f(ra) = rb(a)$. Damit ist f sogar ein Homomorphismus und $\prod M_i$ ein Produkt.
2. Man definiere $\coprod M_i := \{\beta : I \longrightarrow \cup_{i\in I} M_i | \beta(j) \in M_j, \beta \text{ endlichwertig}\}$ und $\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod M_i$, $\iota_j(m_j)(i) = \delta_{ij} m_i$. Dann ist $\coprod M_i \subseteq \prod M_i$ ein Untermodul und die ι_j sind Homomorphismen. Sei $(f_j : M_j \longrightarrow A | j \in I)$ gegeben. Bilde $f(m) = f(\sum \iota_i m_i) = \sum f\iota_i(m_i) = \sum f_i(m_i)$. Dann ist f ein R-Modul-Homomorphismus und es gilt $f\iota_i(m_i) = f_i(m_i)$ also $f\iota_i = f_i$. Ist $g\iota_i$ für alle $i \in I$, so ist $g(m) = g(\sum \iota_i m_i) = \sum g\iota_i m_i = \sum f_i(m_i)$, also $f = g$. $\square$

Satz 3.9. *Sei* $(M_i|i \in I)$ *eine Familie von Untermoduln von* M. *Äquivalent sind die folgenden Aussagen:*

(1) $(M, (\iota_i : M_i \longrightarrow M))$ *ist ein Koprodukt in* R-**Mod**.
(2) $M = \sum_{i\in I} M_i$ *und* $(\sum m_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in I : m_i = 0)$.
(3) $M = \sum_{i\in I} M_i$ *und* $(\sum m_i = \sum m_i' \Longrightarrow \forall i \in I : m_i = m_i')$.
(4) $M = \sum_{i\in I} M_i$ *und* $\forall i \in I : M_i \cap \sum_{j\neq i, j\in I} M_j = 0$.

Definition 3.10. Ist eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 3.9 erfüllt, so heißt M *innere direkte Summe* der M_i, und wir schreiben $M = \oplus_{i\in I} M_i$.

Beweis des Satzes 3.9: 1. $\Longrightarrow$ 2. : Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\nu"] \\ & M/\sum M_i \end{tikzcd}$$

und schließen $\nu = 0$ und $M = \sum M_i$. Wenn $\sum m_i = 0$, dann verwenden wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "\delta_{jk}"'] & M \arrow[d, "p_k"] \\ & M_k \end{tikzcd}$$

und erhalten $0 = p_k(0) = p_k(\sum m_j) = \sum_j p_k\iota_j(m_j) = \sum_j \delta_{jk}(m_j) = m_k$.
2. $\Longrightarrow$ 3. : trivial.
3. $\Longrightarrow$ 4. : Sei $m_i = \sum_{j\neq i} m_j$. Dann folgt $m_i = 0$ und $m_j = 0$ für alle $j \neq i$.
4. $\Longrightarrow$ 2. : Wenn $\sum m_j = 0$, dann ist $m_i = \sum_{j\neq i} -m_j = 0 \in M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j$.
3. $\Longrightarrow$ 1. : Wir definieren f für das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

durch $f(\sum m_i) := \sum f_i(m_i)$. Dann ist f ein wohldefinierter Homomorphismus und es gilt $f\iota_j(m_j) = f_j(m_j) = f(m_j)$. Schließlich ist f eindeutig bestimmt wegen $g\iota_j = f_j \Longrightarrow g(\sum m_i) = \sum g(m_i) = \sum g\iota_i(m_i) = \sum f_i(m_i) = f(\sum m_i) \Longrightarrow f = g$. $\square$

Satz 3.11. *Sei* $(\coprod M_i, (\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod_{i\neq j} M_i))$ *ein Koprodukt in* R-**Mod**. *Dann ist* $\coprod M_i$ *innere direkte Summe der* $\iota_j(M_j)$.

Beweis: ι_j injektiv $\Longrightarrow M_j \cong \iota_j(M_j) \Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[drr] & \iota_j(M_j) \arrow[r] \arrow[dr] & \coprod M_i \arrow[d] \\ & & N \end{tikzcd}$$

definiert ein Koprodukt. Nach 3.9 liegt dann eine innere direkte Summe vor. $\square$

Definition 3.12. Ein Untermodul $M \subseteq N$ heißt *direkter Summand* von N, wenn es einen Untermodul $M' \subseteq N$ gibt, so daß $N = M \oplus M'$ innere direkte Summe ist.

Satz 3.13. *Für einen Untermodul* $M \subseteq N$ *sind äquivalent:*

(1) M *ist ein direkter Summand von* N.
(2) *Es gibt ein* $p \in \mathrm{Hom}_R(.N, .M)$ *mit*

$$(M \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{p} M) = \mathrm{id}_M .$$

(3) *Es gibt ein* $f \in \mathrm{Hom}_R(.N, .N)$ *mit* $f^2 = f$ *und* $f(N) = M$.

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2. : Seien $M_1 := M$ und $M_2 \subseteq N$ mit $N = M_1 \oplus M_2$. Wir definieren $p = p_1 : N \longrightarrow M_1$ durch

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\delta_{ij}"'] & N \arrow[d, "p_j"] \\ & M_j \end{tikzcd}$$

wobei $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij} = \mathrm{id}_{M_i}$ für $i = j$. Dann ist $p_1\iota_1 = \delta_{11} = \mathrm{id}_M$.

2. $\Longrightarrow$ 3. : Für $f := \iota p : N \longrightarrow N$ gilt $f^2 = \iota p \iota p = \iota p = f$ wegen $p\iota = \mathrm{id}$. Weiter ist $f(N) = \iota p(N) = M$, da p surjektiv ist.
3. $\Longrightarrow$ 1. : Sei $M' = \mathrm{Ke}(f)$. Aus $n = f(n) + (n - f(n))$ und $f(n) \in M$ und $f(n - f(n)) = f(n) - f^2(n) = 0$ folgt $n - f(n) \in M'$, also $M + M' = N$. Sei $n \in M \cap M'$. Dann ist $f(n) = 0$ und $n = f(n')$ für ein $n' \in N$, also ist $0 = f(n) = f^2(n') = f(n') = n$. $\square$

Definition 3.14. $P \in R$-**Mod** heißt *projektiv*, wenn zu jedem Epimorphismus $f : M \longrightarrow N$ und zu jedem Homomorphismus $g : P \longrightarrow N$ ein Homomorphismus $h : P \longrightarrow M$ so existiert, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

kommuntiert.

Beispiel 3.15. Alle Vektorräume in K-**Mod** sind projektiv. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$-**Mod** ist nicht projektiv.

Lemma 3.16. *Sei $P = \oplus_{i \in I} P_i$. P ist genau dann projektiv, wenn alle P_i, $i \in I$ projektiv sind.*

Beweis: Sei P projektiv. In dem folgenden Diagramm seien f, g, p_i, ι_i gegeben

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "h\iota_i"'] & P \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "h"] & P_i \arrow[d, "g"] \\
& M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Da f ein Epimorphismus ist, existiert $h : P \longrightarrow M$ mit $fh = gp_i \Longrightarrow g = gp_i\iota_i = fh\iota_i$, also ist P_i projektiv.
Seien alle P_i projektiv. Sei f, g, ι_i in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "h_i"'] & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

gegeben und sei f surjektiv. Dann gibt es $h_i : P_i \longrightarrow M$, $i \in I$ mit $fh_i = g\iota_i$. Da P das Koprodukt der P_i ist, gibt es (genau) ein $h : P \longrightarrow M$ mit $h\iota_i = h_i$ für alle $i \in I$. Dann ist $fh\iota_i = fh_i = g\iota_i$ für alle $i \in I$, also $fh = g$. Damit ist P projektiv. $\square$

Satz 3.17. *Sei $P \in R$-*__Mod__*. Äquivalent sind*

(1) *P ist projektiv.*
(2) *Jeder Epimorphismus $f : M \longrightarrow P$* zerfällt*, d.h. zu jedem Modul M und zu jedem Epimorphismus $f : M \longrightarrow P$ gibt es einen Homomorphismus $g : P \longrightarrow M$ mit $fg = \mathrm{id}_P$.*
(3) *P ist isomorph zu einem direkten Summanden eines freien Moduls RX.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2.: Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_P"] \\
M \arrow[r, "f"'] & P
\end{tikzcd}$$

folgt die Existenz von g mit $fg = 1_P$.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Sei $\iota : P \longrightarrow RP$ freier Modul über (der Menge) P. Dann gibt es einen Homomorphismus $f : RP \longrightarrow P$, so daß

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "1_P"'] & RP \arrow[d, "f"] \\
 & P
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Offenbar ist f surjektiv. Nach 2. gibt es einen Homomorphismus $g : P \longrightarrow RP$ mit $fg = 1_P$. Wegen 3.13 ist P ein direkter Summand von RP (bis auf Isomorphie).
3. $\Longrightarrow$ 1. : Sei $f : M \longrightarrow N$ surjektiv. Sei $\iota : X \longrightarrow RX$ ein freier Modul und sei $g : RX \longrightarrow N$ ein Homomorphismus. In dem folgenden Diagramm sei $k = g\iota : X \longrightarrow N$. Weil f surjektiv ist, gibt es eine Abbildung $h : X \longrightarrow M$ mit $fh = k$. Also gibt es einen Homomorphismus $l : RX \longrightarrow M$ mit $l\iota = h$. Es folgt $fl\iota = fh = k = g\iota$ und daraus $fl = g$, weil RX frei ist. Damit ist RX projektiv. Der Übergang zu einem direkten Summanden folgt aus 3.16.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "k"] & RX \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "l"'] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

$\square$

Bemerkung 3.18. Sei P_R ein R-Modul. Dann ist $E := \mathrm{End}_R(P.) = \mathrm{Hom}_R(P., P.)$ ein Ring und P ein E-R-Bimodul wegen $f(pr) = (fp)r$. Sei $P^* := \mathrm{Hom}_R(P., R.)$, dann ist $P^* = {}_R\mathrm{Hom}_R({}_EP., {}_RR.)_E$ ein R-E-Bimodul. Folgende Abbildungen sind Bimodul-Homomorphismen

$$\mathrm{ev} : {}_RP^* \otimes_E P_R \ni f \otimes p \mapsto f(p) \in {}_RR_R,$$

der *Auswertungshomomorphismus*, und

$$\mathrm{db} : {}_EP \otimes_R P^*_E \longrightarrow {}_EE_E = {}_E\,\mathrm{End}_R(P.)_E$$

mit $\mathrm{db}(p \otimes f)(q) = pf(q)$, der *Dual-Basis-Homomorphismus*. Wir prüfen die Bilinearitätsbedingung: $\mathrm{ev}(fe, p) = (fe)(p) = f(e(p)) = \mathrm{ev}(f, ep)$ und $\mathrm{db}(pr, f)(q) = (pr)f(q) = p(rf(q)) = \mathrm{db}(p, rf)(q)$. Wir prüfen weiter, daß db ein Bimodulhomomorphismus ist. Es ist $\mathrm{db}(ep \otimes f)(q) = e(p)f(q) = e(pf(q)) = e\,\mathrm{db}(p \otimes f)(q)$ und $\mathrm{db}(p \otimes fe)(q) = pfe(q) = \mathrm{db}(p \otimes f)e(q)$.

Lemma 3.19. *Die folgenden Diagramme sind kommutativ*

$$\begin{tikzcd}
P^* \otimes_E P \otimes_R P^* \arrow[r, "1 \otimes \mathrm{db}"] \arrow[d, "\mathrm{ev} \otimes 1"'] & P^* \otimes_E E \arrow[d, "\mu"] \\
R \otimes_R P^* \arrow[r, "\mu"'] & P^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \otimes_R P^* \otimes_E P \arrow[r, "1 \otimes \mathrm{ev}"] \arrow[d, "\mathrm{db} \otimes 1"'] & P \otimes_R R \arrow[d, "\mu"] \\
E \otimes_E P \arrow[r, "\mu"'] & P
\end{tikzcd}$$

Beweis: Der Beweis ist das Assoziativgesetz: $\mu(1 \otimes \mathrm{db})(f \otimes p \otimes g)(q) = \mu(f \otimes pg)(q) = f(pg)(q) = f(pg(q)) = f(p)g(q) = \mu(f(p) \otimes g)(q) = \mu(\mathrm{ev} \otimes 1)(f \otimes p \otimes g)(q)$ und $\mu(\mathrm{db} \otimes 1)(p \otimes f \otimes q) = \mu(pf \otimes q) = pf(q) = \mu(p \otimes f(q)) = \mu(1 \otimes \mathrm{ev})(p \otimes f \otimes q)$. □

Satz 3.20. (Dual-Basis-Lemma) *Sei P_R ein R-Modul. Äquivalent sind:*

(1) *P ist endlich erzeugt und projektiv*
(2) (Duale Basis:) *Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(P., R.) = P^*$ und $p_1, \ldots, p_n \in P$, so daß für alle $p \in P$ gilt*
$$p = \sum p_i f_i(p).$$
(3) *Der Dual-Basis-Homomorphismus*
$$\mathrm{db} : P \otimes_R P^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P., P.)$$
ist ein Isomorphismus.

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2. : Sei P erzeugt von $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei RX freier R-Rechts-Modul über $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Seien $\pi_i : RX \longrightarrow R$ die Projektionen induziert durch

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & RX \arrow[d, "\pi_i"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

mit $\sigma_i(x_j) = \delta_{ij}$. Nach Satz 1.6 gilt $z = \sum x_i \pi_i(z)$ für alle $z \in RX$. Sei $g : RX \longrightarrow P$ der Homomorphismus mit $g(x_i) = p_i$. Da die p_i Erzeugendenmenge von P bilden, ist g surjektiv. Da P projektiv ist, gibt es nach 3.17 einen Homomorphismus $h : P \longrightarrow RX$ mit $gh = 1_P$. Seien $f_i := \pi_i h$. Dann gilt $\sum p_i \pi_i h(p) = \sum g(x_i) \pi_i h(p) = g(\sum x_i \pi_i(h(p))) = gh(p) = p$.
2. $\Longrightarrow$ 3. : Der Homomorphismus $\psi : \mathrm{Hom}_R(P., P.) \longrightarrow P \otimes_R P^*$ mit $\psi(e) = \sum e(p_i) \otimes f_i$ ist Umkehrabbildung zu db, denn $\mathrm{db} \circ \psi(e)(p) = \sum e(p_i) f_i(p) = e(\sum p_i f_i(p)) = e(p)$, also $\mathrm{db} \circ \psi = 1$. Weiter ist $\psi \circ \mathrm{db}(p \otimes f) = \psi(pf) = \sum pf(p_i) \otimes f_i = p \otimes \sum f(p_i) f_i = p \otimes f$, denn $\sum f(p_i) f_i(q) = f(\sum p_i f_i(q)) = f(q)$, also ist auch $\psi \circ \mathrm{db} = 1$.
3. $\Longrightarrow$ 2. : $\sum p_i \otimes f_i = \mathrm{db}^{-1}(1_P)$ ist eine duale Basis, denn es gilt $\sum p_i f_i(p) = \mathrm{db}(\sum p_i \otimes f_i)(p) = 1_P(p) = p$.
2. $\Longrightarrow$ 1. : Wegen $\sum p_i f_i(p) = p$ für alle $p \in P$ sind die p_i Erzeugende von P, P ist also endlich erzeugt. Dann ist $g : RX \longrightarrow P$ mit $g(x_i) = p_i$ surjektiv. Sei $h : P \longrightarrow RX$ definiert durch $h(p) = \sum x_i f_i(p)$. Dann folgt $gh(p) = p$, also ist P direkter Summand von RX, und damit projektiv. □

Satz 3.21. *Sei R ein kommutativer Ring und $P \in R$-**Mod**. Äquivalent sind*

(1) *${}_R P$ ist endlich erzeugt projektiv.*
(2) *Es existieren $P' \in R$-**Mod**, $\mathrm{db}' : R \longrightarrow P \otimes_R P'$, $\mathrm{ev} : P' \otimes_R P \longrightarrow R$*

mit

$$(P \xrightarrow{\mathrm{db}'\otimes 1} P \otimes_R P' \otimes_R P \xrightarrow{1\otimes \mathrm{ev}} P) \;=\; 1_P,$$
$$(P' \xrightarrow{1\otimes \mathrm{db}'} P' \otimes_R P \otimes_R P' \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes 1} P') \;=\; 1_{P'}.$$

Beweis: $\Longleftarrow$: Zu $\mathrm{ev} \in \mathrm{Hom}_R(P' \otimes_R P, R) \cong \mathrm{Hom}_R(P', \mathrm{Hom}_R(P,R))$ gibt es $\epsilon : P' \longrightarrow P^*$ mit $\epsilon(f)(p) = \mathrm{ev}(f \otimes p) = fp$ für $f \in P'$. Sei $\mathrm{db}'(1) = \sum p_i \otimes f_i$. Dann ist $p = 1_P(p) = (1 \otimes_R \mathrm{ev})(\mathrm{db}' \otimes_R 1)(p) = (1 \otimes_R \mathrm{ev})(\sum p_i \otimes f_i \otimes p) = \sum p_i f_i p$. Nach 3.20 ist P endlich erzeugt projektiv.
$\Longrightarrow$: Man setze $P' := P^*$ und $(\mathrm{ev} : P' \otimes_R P \longrightarrow R) = (\mathrm{ev} : P^* \otimes_R P \longrightarrow R)$. Weiter sei $\mathrm{db}'(1) = \sum p_i \otimes f_i$ die Dual-Basis von P. Dann gilt $(1 \otimes_R \mathrm{ev})(\mathrm{db}' \otimes_R 1)(p) = (1 \otimes_R \mathrm{ev})(\sum p_i \otimes f_i \otimes p) = \sum p_i f_i(p) = p$. Weiter ist $\sum f(p_i) f_i(p) = f(\sum p_i f_i(p)) = f(p)$, also $\sum f(p_i) f_i = f$. Daraus folgt $(\mathrm{ev} \otimes_R 1)(1 \otimes_R \mathrm{db}')(f) = (\mathrm{ev} \otimes_R 1)(\sum f \otimes p_i \otimes f_i) = \sum f(p_i) f_i = f$. □

Definition 3.22. $G_R \in$**Mod**-R heißt ein *Generator*, wenn es zu jedem Homomorphismus $f : M \longrightarrow N$ mit $f \neq 0$ einen Homomorphismus $g : G \longrightarrow M$ gibt mit $fg \neq 0$.

Satz 3.23. *Sei $G_R \in$***Mod***-R. Äquivalent sind*

(1) *G ist ein Generator.*
(2) *Zu jedem R-Modul M_R gibt es eine Menge I und einen Epimorphismus $h : \coprod_I G \longrightarrow M$.*
(3) *R ist isomorph zu einem direkten Summanden von $\coprod_I G$ (für eine geeignete Menge I).*
(4) *Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in G^*$ und $q_1, \ldots, q_n \in G$ mit $\sum f_i(q_i) = 1$.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2. : Setze $I := \mathrm{Hom}_R(G., M.)$. Dann definiert

$$\begin{tikzcd} G = G_f \arrow[r, "\iota_f"] \arrow[dr, "f"'] & \coprod_I G_f \arrow[d, "h"] \\ & M \end{tikzcd}$$

genau einen Homomorphismus h mit $h\iota_f = f$ für alle $f \in I$. Sei $N = \mathrm{Bi}(h)$. Betrachte $\nu : M \longrightarrow M/N$. Wenn $N \neq M$, dann ist $\nu \neq 0$. $\Longrightarrow \exists f : \nu f \neq 0 \Longrightarrow \nu h \neq 0$ Widerspruch zu $N = \mathrm{Bi}(h) \Longrightarrow N = M \Longrightarrow h$ Epimorphismus.
2. $\Longrightarrow$ 3. : Sei $\coprod G \longrightarrow R$ ein Epimorphismus. Da R frei, also projektiv, ist, folgt aus 3.17, daß R bis auf Isomorphie direkter Summand von $\coprod G$ ist.
3. $\Longrightarrow$ 4. : Sei $p : \coprod_I G \longrightarrow R$ mit $p\iota = 1_R$ gegeben. Sei $p((g_i)) = 1$ und $f_i = p\iota_i : G \longrightarrow R$. Dann folgt $1 = p((g_i)) = p(\sum \iota_i(g_i)) = \sum p\iota_i(g_i) = \sum f_i(q_i)$.
4. $\Longrightarrow$ 1. : Sei $(g : M \longrightarrow N) \neq 0$, dann gibt es ein $m \in M$ mit $g(m) \neq 0$. Sei $f : R \longrightarrow M$ definiert durch $f(1) = m$, $f(r) = rm$. Seien f_i, q_i gegeben mit $\sum f_i(q_i) = 1$. Dann folgt $0 \neq g(m) = gf(1) = \sum gff_i(q_i)$, also gibt es ein $ff_i : G \longrightarrow M$ mit $gff_i \neq 0$. □

4. Die Morita-Theoreme

Definition 4.1. Sei K in diesem Kapitel ein kommutativer Ring. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *K-Kategorie*, wenn $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M,N)$ ein K-Modul und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,g)$ ein K-Homomorphismus für alle M, N, f, $g \in \mathcal{C}$ ist.
Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwischen K-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißt ein *K-Funktor*, wenn $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ für alle $M, N \in \mathcal{C}$ ein K-Homomorphismus ist.
Ist $K = \mathbb{Z}$, so spricht man von *(prä-)additiven Kategorien* und *additiven Funktoren.*

Bemerkung 4.2. Wir schreiben in §4 die Homomorphismen immer auf der entgegengesetzten Seite der Skalarmultiplikation: $f : {}_RM \longrightarrow {}_RN$ mit $(rm)f = r(mf)$.

Definition 4.3. Eine K-*Algebra* ist ein Ring A zusammen mit einem Ringhomomorphismus $f : K \longrightarrow Z(A) \subseteq A$, wobei $Z(A) := \{a \in A | \ \forall b \in A : ab = ba\}$ das *Zentrum* von A ist. Dadurch wird ${}_KA_K$ zu einem Bimodul: $\kappa a = a\kappa := f(\kappa)a$.
Ein K-*Bimodul* ${}_AM_B$ ist ein A-B-Bimodul mit $(\kappa \cdot 1_A) \cdot m = \kappa m = m\kappa = m \cdot (1_B \cdot \kappa)$.

Definition 4.4. Ein *Morita-Kontext* besteht aus einem 6-Tupel $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, f, g)$ mit K-Algebren A, B, K-Bimoduln ${}_AP_B$, ${}_BQ_A$ und K-Bimodul-Homomorphismen

$$f : {}_AP \otimes_B Q_A \longrightarrow {}_AA_A, \quad g : {}_BQ \otimes {}_AP_B \longrightarrow {}_BB_B,$$

so daß gelten:

(1) $qf(p \otimes q') = g(q \otimes p)q'$ oder $q(pq') = (qp)q'$,
(2) $f(p \otimes q)p' = pg(q \otimes p')$ oder $(pq)p'(qp')$,

wobei wir die Schreibweise $pq := f(p \otimes q)$ und $qp := g(q \otimes p)$ verwenden.

Bemerkung 4.5. Mit dieser Konvention sind alle Produkte assoziativ, z.B. $(pb)q = p(bq)$, $(qa)p = q(ap)$.

Lemma 4.6. *Seien eine K-Algebra A und ein A-Modul ${}_AP$ gegeben. Dann ist* $(A, B, P, Q, f = \mathrm{ev}, g = \mathrm{db})$ *ein Morita-Kontext mit*

$$\begin{array}{ll} B := \mathrm{Hom}_A(.P, .P) & {}_BQ_A := {}_B\,\mathrm{Hom}_A(.P_B, .A_A)_A \\ f(p \otimes q) := (p)q & (p')[g(q \otimes p)] := (p')qp. \end{array}$$

Beweis: wie in 3.19. □

Definition 4.7. Eine K-*Äquivalenz* von K-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Paar von K-Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit $\mathrm{Id}_\mathcal{D} \cong \mathcal{FG}$ und $\mathrm{Id}_\mathcal{C} \cong \mathcal{GF}$.

Satz 4.8. (Morita I) *Sei (A, B, P, Q, f, g) ein Morita-Kontext. Seien f und g Epimorphismen. Dann gelten*

(1) *P ist ein endlich erzeugter projektiver Generator in A-**Mod** und in **Mod**-B.*
*Q ist ein endlich erzeugter projektiver Generator in **Mod**-A und in B-**Mod**.*
(2) *f und g sind Isomorphismen.*
(3) $Q \cong \mathrm{Hom}_A(.P, .A) \cong \mathrm{Hom}_B(P., B.)$
$P \cong \mathrm{Hom}_B(.Q, .B) \cong \mathrm{Hom}_A(Q., A.)$
als Bimoduln.
(4) $A \cong \mathrm{Hom}_B(.Q, .Q) \cong \mathrm{Hom}_B(P., P.)$
$B \cong \mathrm{Hom}_A(.P, .P) \cong \mathrm{Hom}_A(Q., Q.)$
als K-Algebren und als Bimoduln.
(5) $P \otimes_B$ - : B-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod** *und* $Q \otimes_A$ - : A-**Mod** $\longrightarrow$ B-**Mod** *sind zueinander inverse K-Äquivalenzen. Ebenso sind* -$\otimes_A P$: **Mod**-A $\longrightarrow$ **Mod**-B *und* -$\otimes_B Q$: **Mod**-B $\longrightarrow$ **Mod**-A *zueinander inverse K-Äquivalenzen. Weiter sind folgende Funktoren natürlich isomorph:*

$$\begin{array}{rcl} P \otimes_B \text{-} & \cong & \mathrm{Hom}_B(.Q, .\text{-}), \\ Q \otimes_A \text{-} & \cong & \mathrm{Hom}_A(.P, .\text{-}), \\ \text{-} \otimes_A P & \cong & \mathrm{Hom}_A(Q., \text{-}.), \\ \text{-} \otimes_B Q & \cong & \mathrm{Hom}_B(P., \text{-}.). \end{array}$$

(6) *Es gelten folgende Verbandsisomorphismen:*

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathcal{V}({}_AP) & \cong & \mathcal{V}({}_BB), & & \mathcal{V}(P_B) & \cong & \mathcal{V}(A_A), \\ \mathcal{V}({}_BQ) & \cong & \mathcal{V}({}_AA), & & \mathcal{V}(Q_A) & \cong & \mathcal{V}(B_B), \\ \mathcal{V}({}_BQ_A) & \cong & \mathcal{V}({}_AA_A) & \cong & \mathcal{V}({}_BB_B) & \cong & \mathcal{V}({}_AP_B). \end{array}$$

(7) *Zentrum*$(A) \cong$ *Zentrum*(B).

Beweis: 1. Die Isomorphismen aus 2.22 bilden $g \in \mathrm{Hom}_{B\text{-}B}(.Q \otimes_A P., .B.)$ in Bimodul-Homomorphismen $g_1 : P \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(.Q, .B)$ und $g_2 : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(P., B.)$ ab. Weiter induziert f Bimodul-Homomorphismen $f_1 : P \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q., A.)$ und $f_2 : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .A)$.
Wenn g ein Epimorphismus ist, dann gibt es $\sum q_i \otimes p_i \in Q \otimes_A P$ mit $g(\sum q_i \otimes p_i) = 1_B = \mathrm{id}_P$. Also gilt $p = \sum pq_ip_i = \sum(p)[f_2(q_i)]p_i$ für jedes $p \in P$. Nach dem Dual-Basis-Lemma 3.20 ist ${}_AP$ endlich erzeugt und projektiv.
Wenn f ein Epimorphismus ist, dann gibt es $\sum x_i \otimes y_i \in P \otimes_B Q$ mit $f(\sum x_i \otimes y_i) = 1_A = \sum(x_i)[f_2(y_i)]$. Nach 3.23 ist ${}_AP$ ein Generator. Die Aussagen für P_B, ${}_BQ$ und Q_A folgen aus Symmetriegründen.
2. Wenn $f(\sum a_i \otimes b_i) = 0$, dann ist $\sum_{i,j} a_i \otimes b_i f(x_j \otimes y_j) = \sum a_i \otimes g(b_i \otimes x_j)y_j = \sum a_i g(b_i \otimes x_j) \otimes y_j = \sum f(a_i \otimes b_i)x_j \otimes y_j = 0$. Also ist f injektiv. Analog zeigt man, daß g ein Isomorphismus ist.
3. Der Homomorphismus $f_2 : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .A)$ wie in 1. erfüllt $(p)[f_2(q)] = f(p \otimes q) = pq$. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(.P, .A)$. Dann ist $(p)\varphi = (p \sum q_ip_i)\varphi = \sum(pq_i)(p_i)\varphi$, also gilt $\varphi = \sum q_i(p_i)\varphi = \sum f_2(q_i(p_i)\varphi)$. Daher ist f_2 ein Epimorphismus. Sei $(p)[f_2(q)] = pq = 0$ für alle $p \in P$. Dann folgt $q = 1_Bq = \sum q_ip_iq = 0$. Also ist f_2 ein Isomorphismus.
4. Die B-Modulstruktur von P induziert $B \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .P)$. Sei $pb = 0$ für alle $p \in P$. Dann ist $b = 1_B \cdot b = \sum q_ip_ib = 0$. Wenn $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(.P, .P)$, dann ist $(p)\varphi = (p1_B)\varphi = (\sum p(q_ip_i))\varphi = \sum(pq_i)(p_i)\varphi = \sum p(q_i(p_i)\varphi)$ und damit $\varphi = \sum q_i(p_i)\varphi$. Damit ist $B \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .P)$ ein Isomorphismus von K-Algebren und Bimoduln.
5. ${}_AP \otimes_B Q \otimes_A X \cong {}_AA \otimes_A X \cong {}_AX$ funktoriell in X und ${}_BQ \otimes_A P \otimes_B Y \cong {}_BB \otimes_B Y \cong {}_BY$ funktoriell in Y ergeben die Behauptung. Weiter ist ${}_BQ \otimes_A U \cong {}_B\mathrm{Hom}_A(.P, .A) \otimes_A U \cong {}_B\mathrm{Hom}_A(.P, .A \otimes_A U) \cong {}_B\mathrm{Hom}_A(.P, .U)$ funktoriell in U, denn der Homomorphismus $\varphi : \mathrm{Hom}_A(.P, .A) \otimes_A U \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .A \otimes_A U)$ mit $(p)[\varphi(f \otimes u)] := ((p)f) \otimes u$ ist ein Isomorphismus. Wir zeigen allgemeiner: □

Lemma 4.9. *Wenn ${}_AP$ endlich erzeugt projektiv ist und ${}_AV_B$ und ${}_BU$ (Bi-)Moduln sind, dann ist der (in U und V) funktorielle Homomorphismus*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_A(.P, .V) \otimes_B U \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .V \otimes_B U)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $\sum f_i \otimes p_i \in \mathrm{Hom}_A(.P, .A) \otimes_A P$ eine Dual-Basis für P. Dann ist

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Hom}_A(.P, .V \otimes_B U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.P, .V) \otimes_B U$$

mit $\varphi^{-1}(g) = \sum_{i,j}()f_iv_{ij} \otimes u_{ij}$ mit $(p_i)g =: \sum_j v_{ij} \otimes u_{ij}$ invers zu φ, definiert durch $(p)[\varphi(f \otimes u)] = (p)f \otimes u$. Da φ ein Homomorphismus ist, $(p)[\varphi(fb \otimes u)] = (p)fb \otimes u = (p)f \otimes bu = (p)[\varphi(f \otimes bu)]$, genügt es, daß φ^{-1} als Abbildung gegeben ist. Es gilt nun $(p_i)\varphi(f \otimes u) = (p_i)f \otimes u$, also $\varphi^{-1}\varphi(f \otimes u) = \sum()f_i(p_i)f \otimes u = \sum(()f_ip_i)f \otimes u = f \otimes u$. Weiter ist $\varphi\varphi^{-1}(g) = \varphi(\sum()f_i(p_i)g) = \sum()f_i(p_i)g = (\sum()f_ip_i)g = g$. □

Beweis von 4.8: (Fortsetzung)
6. Bei der Äquivalenz der Kategorien wird ${}_AP$ auf $\mathrm{Hom}_A(.P, .P) \cong {}_BB$ abgebildet. Daraus folgt $\mathcal{V}({}_AP) \cong \mathcal{V}({}_BB)$. Ein Unterobjekt von ${}_AP$ ist nämlich eine Isomorphieklasse von Monomorphismen ${}_AU \longrightarrow {}_AP$, wobei zwei solche Isomorphismen isomorph heißen, wenn es einen

notwendigerweise eindeutig bestimmten Isomorphismus $U \cong U'$ gibt, so daß

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & P \\ U' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Solche Unterobjekte werden bei einer Äquivalenz von Kategorien offenbar erhalten. Weiter gilt für Unterobjekte von ${}_AP_B$, daß

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "\cdot b"'] & P \arrow[d, "\cdot b"] \\ U \arrow[r] & P \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(.P,.U) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot b"'] & B \arrow[d, "\cdot b"] \\ \mathrm{Hom}_A(.P,.U) \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

kommutieren. Also ist ${}_AU_B \in \mathcal{V}({}_AP_B)$ genau dann, wenn $\mathrm{Hom}_A(.P,.U) \in \mathcal{V}({}_BB_B)$.
7. Der Beweis dieses Teils zerfällt in zwei Schritte. Man führt die Algebra $\mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}})$ als die Menge der funktoriellen Endomorphismen von $\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}$ ein mit der Addition von Morphismen und der Komposition von Morphismen als Operationen für die Ringstruktur. Das ist offenbar eine Algebra. Dann zeigt man in einem ersten Schritt, daß das Zentrum von A isomorph zu $\mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}})$ ist. In einem zweiten Schritt zeigt man dann, daß $\mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{B\text{-}\mathbf{Mod}})$ gilt. Das ist nahezu trivial, weil alle kategorietheoretisch charakterisierten Terme bei einer Äquivalenz erhalten bleiben. Damit hat man dann Zentrum $(A) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{B\text{-}\mathbf{Mod}}) \cong$ Zentrum (B).
Sei $z \in Z(A)$. Für $M = \mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}(M)$ gilt dann $zam = azm$, also ist $z = z\cdot \in \mathrm{End}_A(M)$. Damit definiert $z\cdot$ einen Endomorphismus von $\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}(M)$, denn

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "z\cdot"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "z\cdot"'] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das definiert einen Homomorphismus $Z(A) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}})$. Sei nun $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(Id_{A\text{-}\mathbf{Mod}})$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "f_m"'] & A \arrow[d, "f_m"] \\ M \arrow[r, "\varphi(M)"'] & M \end{tikzcd}$$

wobei $(a)f_m = am$. Jedes $f \in \mathrm{Hom}_A(.A,.M)$ ist von dieser Form. Für $M = A$ gilt $a(1)[\varphi(A)] = (a)[\varphi(A)] = (1)[f_a\varphi(A)] = (1)[\varphi(A)f_a] = (1)[\varphi(A)]a$, also ist $(1)[\varphi(A)] \in Z(A)$. Für beliebiges $M \in A$-**Mod** gilt dann $(m)[\varphi(M)] = (1)[f_m\varphi(M)] = (1)[\varphi(A)f_m] = (1)[\varphi(A)]m$, d.h. $\varphi(M)$ ist von der Form $z\cdot$ mit $z = (1)[\varphi(A)]$. Die so definierten Abbildungen sind offenbar invers zueinander: $z \mapsto z\cdot \mapsto z \cdot 1 = z$ und $\varphi \mapsto (1)[\varphi(A)] \mapsto (1)[\varphi(A)]\cdot$.

Um zu zeigen, daß $\mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}})$ und $\mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(B\text{-}\mathbf{Mod})$ zueinander isomorph sind, sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{funkt}}(\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}) =: E(A)$. Wir definieren $\varphi' \in E(B)$ durch

$$\begin{tikzcd}
{}_BM \arrow[r, "\varphi'(M)"] \arrow[d, "\beta(M)"'] & {}_BM \arrow[d, "\beta(M)"] \\
ST({}_BM) \arrow[r, "S\varphi T(M)"'] & ST({}_BM)
\end{tikzcd}$$

wobei $S : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod}$, $T : B\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ die zueinander inversen Äquivalenzen aus 5. sind und $\alpha : \mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow TS$ bzw. $\beta : \mathrm{Id}_{B\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow ST$ die zugehörigen Isomorphismen. Analog ordnen wir jedem $\psi \in E(B)$ ein $\psi' \in E(A)$ zu durch

$$\begin{tikzcd}
{}_AN \arrow[r, "\psi'(N)"] \arrow[d, "\alpha(N)"'] & {}_AN \arrow[d, "\alpha(N)"] \\
TS({}_AN) \arrow[r, "T\psi S(N)"'] & TS({}_AN)
\end{tikzcd} .$$

Die Kompositionen von $\psi \mapsto \psi'$ und $\varphi \mapsto \varphi'$ definieren jeweils einen Isomorphismus, also ist jede einzelne Abbildung ein Isomorphismus. Eine der beiden Kompositionen ist in dem folgenden Diagramm enthalten.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi''(N)"] \arrow[d, "\alpha(N)"'] & N \arrow[d, "\alpha(N)"] \\
TS(N) \arrow[r, "T\varphi' S(N)"] \arrow[d, "T\beta S(N)"'] & TS(N) \arrow[d, "T\beta S(N)"] \\
T(ST)S(N) \arrow[r, "TS\varphi TS(N)"] & T(ST)S(N) \\
TS(N) \arrow[r, "TS\varphi(N)"] \arrow[u, "TS\alpha(N)"] & TS(N) \arrow[u, "TS\alpha(N)"'] \\
N \arrow[r, "\varphi(N)"] \arrow[u, "\alpha(N)"] & N \arrow[u, "\alpha(N)"']
\end{tikzcd}$$

Die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi''$ ist daher ein innerer Automorphismus von $E(A)$, also bijektiv. □

Satz 4.10. (Morita II) *Seien $S : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod}$ und $T : B\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ zueinander inverse K-Äquivalenzen. Sei ${}_AP_B := T(B)$ und ${}_BQ_A := S(A)$. Dann gibt es Isomorphismen $f : {}_AP \otimes_B Q_A \longrightarrow {}_AA_A$ und $g : {}_BQ \otimes_A P_B \longrightarrow {}_BB_B$, so daß (A, B, P, Q, f, g) ein Morita-Kontext ist.*
Weiter gilt $S \cong Q \otimes_A$ - und $T \cong P \otimes_B$ -.

Satz 4.11. (Morita III) *Sei $P \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ ein endlich erzeugter projektiver Generator (=* Progenerator*). Dann ist der Morita-Kontext $(A, \mathrm{Hom}_A(.P, .P), P, Q, f = \mathrm{ev}, g = \mathrm{db})$ strikt, d.h. f und g sind Epimorphismen.*

Beweis: Da ${}_AP$ endlich erzeugt projektiv ist, ist $g = \mathrm{db}$ ein Isomorphismus (3.20). Da ${}_AP$ ein Generator ist, ist $f = \mathrm{ev}$ ein Epimorphismus (3.23). $\square$

Beweis von 4.10: 1. Seien S, T gegeben. Dann ist $S : \mathrm{Hom}_A(.M, .N) \ni f \mapsto S(f) \in \mathrm{Hom}_B(.SM, .SN)$ ein Isomorphismus. Sei $\alpha : TS \cong \mathrm{Id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}$. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_A(.M, .N) \xrightarrow{S} \mathrm{Hom}_B(.SM, .SN) \xrightarrow{T} \mathrm{Hom}_A(.TSM, .TSN) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha^{-1},\alpha)} \mathrm{Hom}_A(.M, .N)$$

die Identität, denn $\mathrm{Hom}(\alpha^{-1}, \alpha)TS(f) = \alpha \circ TSf \circ \alpha^{-1} = f$ weil

$$\begin{tikzcd} TSM \arrow[r, "TDf"] \arrow[d, "\alpha"'] & TSN \arrow[d, "\alpha"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Also ist S ein Monomorphismus und $\mathrm{Hom}(\alpha^{-1}, \alpha) \circ T$ ein Epimorphismus. Da $\mathrm{Hom}(\alpha^{-1}, \alpha)$ ein Isomorphismus ist, ist T ein Epimorphismus für $T : \mathrm{Hom}_B(.SM, .SN) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(.TSM, .TSN)$. Symmetrisch ist T immer ein Monomorphismus. Also ist T ein Isomorphismus und damit auch S.

2. Ist $f \in B$-**Mod** ein Epimorphismus, so ist auch $Tf \in A$-**Mod** ein Epimorphismus. Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Epimorphismus. Seien $g, h \in A$-**Mod** mit $g \circ Tf = h \circ Tf$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} STM \arrow[r, "STf"] \arrow[d, "\beta"'] & STN \arrow[r, shift left, "Sg"] \arrow[r, shift right, "Sh"'] \arrow[d, "\beta"] & SM \\ M \arrow[r, "f"] & N & \end{tikzcd}$$

mit $Sg \circ STf = Sh \circ STf$. Da f ein Epimorphismus ist, folgt $Sg = Sh$, also auch $g = h$.

3. Wenn $P \in A$-**Mod** projektiv ist, dann ist auch $SP \in B$-**Mod** projektiv. Seien nämlich ein Epimorphismus $f : M \longrightarrow N$ in B-**Mod** und ein Homomorphismus $g : SP \longrightarrow N$ gegeben. Dann ist $Tf : TM \longrightarrow TN$ ein Epimorphismus und $Tg : TSP \longrightarrow TN$ in A-**Mod**. Weil $\alpha : TSP \cong P$, gibt es ein $h : P \longrightarrow TM$ mit $Tf \circ h = Tg \circ \alpha^{-1}$ oder $Tf \circ h \circ \alpha = Tg$. Wir wenden S an und erhalten $STf \circ S(h \circ \alpha) = STg$, wobei $S(h \circ \alpha) \in \mathrm{Hom}_B(.STSP, .STM)$. Weil $\beta : STM \cong M$, ist $\mathrm{Hom}(\beta^{-1}, \beta) : \mathrm{Hom}_B(.STSP, .STM) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(.SP, .M)$ ein Isomorphismus mit Inversem $\mathrm{Hom}(\beta, \beta^{-1})$. Für $k : SP \longrightarrow M$ mit $k = \beta \circ S(h \circ \alpha) \circ \beta^{-1}$ gilt dann $\beta \circ ST(k) = k \circ \beta = \beta \circ S(h \circ \alpha) \circ \beta^{-1} \circ \beta = \beta \circ S(h \circ \alpha)$, also $ST(k) = S(h \circ \alpha)$ und $T(k) = h \circ \alpha$. Also gilt $STf \circ STk = STg = ST(f \circ k)$ und damit $g = f \circ k$. Also ist SP projektiv.

4. Wenn $G \in A$-**Mod** ein Generator ist, dann ist auch $SG \in B$-**Mod** ein Generator. Sei nämlich $(f : M \longrightarrow N) \neq$ in B-**Mod**. Dann ist $Tf \neq 0$, also gibt es ein $g : G \longrightarrow TM$ mit $Tf \circ g \neq 0$. Folglich ist $STf \circ Sg \neq 0$ und $f \circ (\alpha \circ Sg) = \alpha \circ STf \circ Sg \neq 0$.

5. Wir zeigen jetzt $S(\oplus_{i\in I} M_i) \cong \oplus_{i\in I} S(M_i)$: Sei eine Familie $(f_i : S(M_i) \longrightarrow N | i \in I)$ in B-**Mod** gegeben. Da nach 1. S ein Isomorphismus ist, gibt es genau eine Familie $(g_i : M_i \longrightarrow TN)$ mit $Sg_i = \alpha^{-1} \circ f_i$. Also existiert genau ein $g : \oplus M_i \longrightarrow TN$ mit $g \circ \iota_i = g_i$. Wir wenden S an und erhalten $Sg \circ S\iota_i = Sg_i = \alpha^{-1} \circ f_i$ bzw. $\alpha \circ Sg \circ S\iota_i = f_i$. Weil $\alpha \circ S$-ein Isomorphismus ist, ist $\alpha \circ Sg$ eindeutig durch die Bedingung $\alpha \circ Sg \circ S\iota_i = f_i$ festgelegt, also ist $(S(\oplus M_i), S\iota_i)$ direkte Summe der $S(M_i)$.

6. $S(A)$ ist endlich erzeugt in B-**Mod**, also ein endlich erzeugter projektiver Generator.

Da $B \in B$-**Mod** ein Generator ist, ist auch $T(B) \in A$-**Mod** ein Generator. Also gibt es eine Menge E mit $A \oplus M \cong \oplus_E TB$. Wegen $A = A \cdot 1$ kann E endlich gewählt werden. $\Longrightarrow S(A) \oplus S(M) \cong \oplus_E STB \cong \oplus_E B$. Also gibt es einen Epimorphismus $\oplus_E B \longrightarrow SA$. Damit ist $SA \in B$-**Mod** endlich erzeugt.
(Bemerkung: Eine Äquivalenz S bildet endlich erzeugte Moduln immer auf endlich erzeugte Moduln ab. Den Beweis dafür führen wir unten.)
7. $A \cong \mathrm{Hom}_B(.SA, .SA)$ als Ringe, denn $A \cong \mathrm{Hom}_A(.A, .A) \xrightarrow{S} \mathrm{Hom}_B(.SA, .SA)$.
8. $TB \cong \mathrm{Hom}_B(.SA, .B)$, denn $\mathrm{Hom}_B(.SA, .B) \xrightarrow{T} \mathrm{Hom}_A(.TSA, .TB) \cong \mathrm{Hom}_A(.A, .TB) \cong TB$.
9. (B, A, SA, TB, f, g) bilden einen strikten Morita Kontext nach Morita III.
10. $\mathrm{Hom}_B(.SM, .N) \cong \mathrm{Hom}_A(.M, .TN)$, denn $\mathrm{Hom}_B(.SM, .N) \cong \mathrm{Hom}_A(.TSM, .TN) \cong \mathrm{Hom}_A(.M, .TN)$.
11.
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B(.SA \otimes_A M, .N) &\cong \mathrm{Hom}_A(.M, .\,\mathrm{Hom}_B(.SA, .N)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(.M, .\,\mathrm{Hom}_A(.A, .TN)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(.M, .TN) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(.SM, .N). \end{aligned}$$
Als darstellendes Objekt ist ${}_BSM \cong {}_BSA \otimes_A M$ funktoriell in M wegen 2.17. □

Satz 4.12. *${}_RM$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn in jeder Menge $\{A_i | i \in I\}$ mit $A_i \subseteq M$ und $\sum_{i\in I} A_i = M$ eine endliche Teilmenge $\{A_i | i \in I_0\}$, $I_0 \subseteq I$ endlich, mit $\sum_{i\in I_0} A_i$ existiert.*

Beweis: Sei $M = Rm_1 + \ldots + Rm_n$. Jedes m_j ist in einer endlichen Summe der A_i enthalten, also auch alle m_j und damit auch M. Für die Umkehrung betrachten wir $\{Rm | m \in M\}$. Es gilt $M = \sum Rm$, also ist M eine Summe von endlich vielen Rm und damit endlich erzeugt. □

Folgerung 4.13. *Bei einer Kategorienäquivalenz $T : R$-**Mod**$\longrightarrow S$-**Mod** werden endlich erzeugte Moduln in endlich erzeugte Moduln abgebildet.*

Beweis: Der Verband der Untermoduln $\mathcal{V}(M)$ ist isomorph zum Verband der Untermoduln $\mathcal{V}(TM)$. □

5. Einfache und halbeinfache Ringe

Definition 5.1. Ein Ideal ${}_RI \subseteq {}_RR$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \geq 1$ gibt mit $I^n = 0$.
Ein Modul ${}_RM$ heißt *artinsch* (Emil Artin, 1898-1962), wenn jede nichtleere Menge von Untermoduln von M ein minimales Element besitzt.
Ein Ring R heißt *einfach*, wenn ${}_RR$ als Modul artinsch ist und R keine nichttrivialen ($\neq 0, R$) zweiseitigen Ideale besitzt.
Ein Ring R heißt *halbeinfach*, wenn ${}_RR$ artinsch ist und R keine nichttrivialen ($\neq 0$) nilpotenten Links-Ideale besitzt.

Lemma 5.2. *Jeder einfache Ring ist halbeinfach.*

Beweis: $C := \sum(I | {}_RI \subseteq {}_RR$ nilpotent) ist zweiseitiges Ideal, denn für $a \in I$, $r \in R$ gilt
$$(r_1ar)(r_2ar)\ldots(r_nar) = (r_1a)(rr_2a)\ldots(rr_na)r \in I^nR = 0.$$
Also gilt $(Rar)^n = 0 \Longrightarrow Rar \subseteq C \Longrightarrow C = 0$ oder $C = R$. Sei $C = 0$. Dann gibt es keine nichttrivialen nilpotenten Ideale. Sei $C = R$. Dann gibt es $a_i \in I_i$ mit $1 = a_1 + \ldots + a_n$. Es ist $I_1 + I_2$ nilpotent, denn $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_{2n} + b_{2n})$ hat entweder Monome in $I_1^n \cdot R$ oder in $I_2^n \cdot R$. Aber $I_1^n = 0 = I_2^n \Longrightarrow (I_1 + I_2)^{2n} = 0$. Also ist 1 nilpotent. Widerspruch. □

Definition 5.3. Ein Modul ${}_RM$ heißt *einfach* genau dann, wenn $M \neq 0$ und M nur 0 und M als Untermoduln besitzt. Ein Ideal ${}_RI$ heißt *einfach* oder *minimal*, wenn es als Modul einfach ist.

Lemma 5.4. *Sei R halbeinfach. Dann ist jedes Links-Ideal von R ein direkter Summand von R.*

Beweis: Sei I ein Ideal in R, das kein direkter Summand ist und sei I minimal mit dieser Eigenschaft. Ein solches Ideal existiert, weil R artinsch ist.
Fall 1: Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, das nicht minimal (einfach) ist, d.h. es gibt ein Ideal $J \subseteq I$ mit $0 \neq J \neq I$. Dann ist J direkter Summand von R, d.h. es gibt einen Homomorphismus $f : R \longrightarrow J$ mit $(J \longrightarrow I \longrightarrow R \xrightarrow{f} J) = \mathrm{id}_J$. Es folgt $I = J \oplus K$ für ein $K := \mathrm{Ke}(I \longrightarrow R \xrightarrow{f} J)$. Da $K \neq I$, gibt es auch ein $g : R \longrightarrow K$ mit $(K \longrightarrow I \longrightarrow R \xrightarrow{g} K) = \mathrm{id}_K$. Für die Abbildung $f + g - gf : I \longrightarrow R \longrightarrow I$ gilt $(f + g - gf)(j) = f(j) + g(j) - gf(j) = j + g(j) - g(j) = j$ für alle $j \in J$ und $(f + g - gf)(k) = f(k) + g(k) - gf(k) = 0 + k - 0 = k$ für alle $k \in K$, also $(f + g - gf : I \longrightarrow R \longrightarrow I) = \mathrm{id}_I$. Damit ist I direkter Summand von R. Widerspruch.
Fall 2: Sei I minimales oder einfaches Ideal. Da I nicht nilpotent ist und $0 \neq I^2 \subseteq I$ gilt, ist $I^2 = I$. Also existiert insbesondere ein $a \in I$ mit $Ia = I$, denn Ia ist ebenfalls ein Ideal. Damit ist $\cdot a : I \longrightarrow I$ ein Epimorphismus und sogar ein Isomorphismus, denn $\mathrm{Ke}(\cdot a)$ muß als Ideal Null sein (vgl. Lemma von Schur.) Also existiert $e \in I$, $e \neq 0$ mit $ea = a$. $\Longrightarrow (e^2 - e)a = eea - ea = a - a = 0 \Longrightarrow e^2 - e = 0 \in I \Longrightarrow e^2 = e \in I$. Da $I = Re$, gilt $R = Re \oplus R(1 - e)$, denn $R = Re + R(1 - e)$ und $re = s(1 - e) \in Re \cap R(1 - e) \Longrightarrow re = re^2 = s(1 - e)e = 0$. Damit ist I direkter Summand von R. Widerspruch. □

Lemma 5.5. (Schur) *Seien ${}_RM$, ${}_RN$ einfache Moduln. Dann gelten:*

(1) *Wenn $M \ncong N$, dann ist* $\mathrm{Hom}_R(.M, .N) = 0$.
(2) $\mathrm{Hom}_R(.M, .M)$ *ist ein Schiefkörper (= Divisionsalgebra = nicht-kommutativer Körper).*

Beweis: Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus mit $f \neq 0$. Dann ist $\mathrm{Bi}(f) = N$, weil N einfach ist, und $\mathrm{Ke}(f) = 0$, weil M einfach ist, also ist f ein Isomorphismus. Daraus folgt 1. Weiter folgt 2., weil jeder Endomorphismus $f : M \longrightarrow M$ mit $f \neq 0$ unter der Multiplikation in $\mathrm{Hom}_R(.M, .M)$ invertierbar ist. Ein *Schiefkörper* ist nämlich ein Ring, dessen von Null verschiedene Elemente eine Gruppe unter der Multiplikation bilden. □

Bemerkung 5.6. Sei ${}_RM$ einfach. Dann ist $\mathrm{End}_R(.M) = D$ ein Schiefkörper. Also ist die R-Modulstruktur von M charakterisiert durch $R \longrightarrow \mathrm{End}_D(M.) = M_n(D)$.

Satz 5.7. (Wedderburn) *Äquivalent sind:*

(1) *R ist einfach.*
(2) *R besitzt ein einfaches Ideal, das ein R-Progenerator ist.*
(3) *$R \cong M_n(D)$ = voller Matrizenring über einem Schiefkörper D. (n ist eindeutig, D bis auf Isomorphie eindeutig.)*
(4) *$R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ mit isomorphen einfachen Linksidealen $I_1, \ldots, I_n$.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2. : Da R artinsch ist, gibt es ein einfaches Ideal $0 \neq I \subseteq R$. Sei $J := \sum\{I' | I'$ Ideal in R und $I' \cong I\}$. Dann ist J ein zweiseitiges Ideal, denn $I' \cdot r \neq 0 \Longrightarrow \cdot r : I' \longrightarrow R$ hat $\mathrm{Ke}(\cdot r) = 0$, also ist $\cdot r$ injektiv und das Bild $I' \cdot r$ ist isomorph zu I' bzw. I, liegt also in J. Da R einfach ist, gilt $R = J = \sum I_i$. Da $1 \in I_1 + \ldots + I_n$, gibt es einen Epimorphismus $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n \longrightarrow R$ (äußere direkte Summe), der zerfällt, da R projektiv ist. Also ist R bis auf Isomorphie direkter Summand von $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$, und damit ist I ein Generator. Weiter ist I direkter Summand von R nach 5.4, also endlich erzeugt projektiv, also ist I ein R-Progenerator.

2. $\Longrightarrow$ 3. : $\mathrm{End}_R(.I) =: D$ ist nach dem Lemma von Schur ein Schiefkörper. ${}_RI_D$ erzeugt eine Kategorienäquivalenz. Also gilt $R \cong \mathrm{End}_D(I.) \cong M_n(D)$.
3. $\Longrightarrow$ 4. : $R \cong M_n(D) \Longrightarrow R \cong \mathrm{End}_D(V.)$ mit einem n-dimensionalen D-Vektorraum V. V_D ist ein Progenerator. Also gilt $\mathcal{V}({}_RR) \cong \mathcal{V}({}_DV^*)$. Da $V^* \cong D \oplus \ldots \oplus D$, gilt ${}_RR \cong I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ mit $I_1 \cong \ldots \cong I_n \cong {}_RV \otimes_D D \cong {}_RV$.
4. $\Longrightarrow$ 2. : Offenbar ist I_1 ein R-Progenerator.
2. $\Longrightarrow$ 1. : R-**Mod** $\cong$ D-**Mod** mit $D \cong \mathrm{End}_R(I)$. Also ist $\mathcal{V}({}_RR) \cong \mathcal{V}({}_D\mathrm{Hom}_D(I., {}_DD.))$ artinsch, und es gilt $\mathcal{V}({}_RR_R) \cong \mathcal{V}({}_DD_D) = \{0, D\}$. Damit ist R einfach. □

Folgerung 5.8. *Sei R einfach und ${}_RM$ endlich erzeugt. Dann gelten*

(1) *${}_RM$ ist ein R-Progenerator.*
(2) *$\mathrm{End}_R(.M) = S$ ist ein einfacher Ring.*
(3) *Zentrum $(R) \cong$ Zentrum $(\mathrm{End}_R(.M))$.*
(4) *$R \cong \mathrm{End}_S(M.)$.*

Beweis: 1. Wegen R-**Mod** $\cong$ D-**Mod** und weil jeder endlich erzeugte D-Modul ein Progenerator ist, folgt die Behauptung.
2. S-**Mod** $\cong$ R-**Mod** $\cong$ D-**Mod** impliziert, daß $\mathcal{V}({}_SS) \cong \mathcal{V}({}_DP)$ artinsch ist. Weiter ist $\mathcal{V}({}_SS_S) \cong \mathcal{V}({}_DD_D)$, also ist S ein einfacher Ring.
3.+4. folgt aus dem Morita-Theoremen. □

Definition und Bemerkung 5.9. Ein R-Modul ${}_RJ$ heißt *injektiv*, wenn zu jedem Monomorphismus $f : M \longrightarrow N$ und zu jedem Homomorphismus $g : M \longrightarrow J$ ein Homomorphismus $h : N \longrightarrow J$ existiert mit $hf = g$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ J & \end{tikzcd} .$$

Vektorräume sind injektiv. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ ist nicht injektiv. Die injektiven $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die teilbaren abelschen Gruppen. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ ist injektiv.

Satz 5.10. *(Das Baersche Kriterium): Äquivalent sind für $Q \in R$-**Mod**:*

(1) *Q ist injektiv.*
(2) $\forall {}_RI \subseteq {}_RR$, $\forall g : I \longrightarrow Q\ \exists h : R \longrightarrow Q$ *mit* $h\iota = g$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, "h"] \\ Q & \end{tikzcd} .$$

(3) *Jeder Monomorphismus $f : Q \xrightarrow{f} M$ zerfällt, d.h. es gibt einen Epimorphismus $g : M \longrightarrow Q$ mit $gf = 1_Q$.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2. : folgt unmittelbar aus der Definition.

1. $\Longrightarrow$ 3. : Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_Q"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

definiert das geforderte g.
3. $\Longrightarrow$ 1. : In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ Q \arrow[r, shift left, "\varphi"] & P \arrow[l, shift left, "\rho"] \end{tikzcd}$$

sei f ein Monomorphismus und $P := N \oplus Q/\{(f(m), -g(m))|m \in M\}$ mit φ bzw. ψ kanonische Abbildungen in die linke bzw. rechte Komponente: $\varphi(q) := \overline{(0,q)}, \psi(n) := \overline{(n,0)}$. Wegen $\psi f(m) = \overline{(f(m),0)} = \overline{(0,g(m))} = \varphi g(m)$ gilt $\psi f = \varphi g$. Sei $\varphi(q) = \overline{(0,q)} = 0$. Dann existiert ein $m \in M$ mit $f(m) = 0$ und $g(m) = q$. Da f injektiv ist, ist $m = 0$ und damit φ injektiv. Wegen 3. existiert ein ρ mit $\rho\varphi = 1_Q$. Dann ist $\rho\psi f = \rho\varphi g = g$, also ist Q injektiv.
2. $\Longrightarrow$ 1. : Seien ein Monomorphismus $f : M \longrightarrow N$ und ein Homomorphismus $g : N \longrightarrow Q$ gegeben. Wir betrachten die Menge $\mathcal{S} := \{(N_i, \varphi_i)\}$, wobei $N_i \subseteq N$ ein Untermodul mit $\mathrm{Bi}(f) \subseteq N_i$ ist und $\varphi_i : N_i \longrightarrow Q$ ein Homomorphismus ist, so daß

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N_i \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi_i"] & N \\ Q & & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, weil $(\mathrm{Bi}(f), gf^{-1}) \in S$. Weiter ist $\mathcal{S}$ geordnet durch $(N_i, \varphi_i) \leq (N_j, \varphi_j)$, wenn $N_i \subseteq N_j$ und $\varphi_j|_{N_i} = \varphi_i$ gilt. Sei $\{(N_i, \varphi_i)|i \in J\}$ eine Kette in $\mathcal{S}$. Dann ist $\cup N_i \subseteq N$ ein Untermodul. $\psi : \cup N_i \longrightarrow Q$ mit $\psi(n_i) = \varphi_i(n_i)$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus und $(\cup N_i, \psi) \in \mathcal{S}$. Weiter gilt $(N_j, \varphi_j) \leq (\cup N_i, \psi)$ für alle $j \in J$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es in $\mathcal{S}$ ein maximales Element (N', φ'). Wir zeigen $N' = N$, denn dann ist die Fortsetzung von g auf N gegeben. Sei $x \in N \setminus N'$. Dann ist $N' \subsetneqq N' + Rx$. Sei $I := \{r \in R|rx \in N'\}$. Dann ist I ein Ideal und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\cdot x"] & R \arrow[d, "\rho"] \arrow[dl, "\sigma"'] \\ M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & N' + Rx \arrow[dl, "\tau"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

mit $\rho(r) := r \cdot x$. Dann gilt $\rho(I) \subseteq N'$. Es gibt also nach 2. einen Homomorphismus $\sigma : R \longrightarrow Q$ mit $\sigma\iota = \varphi' \circ (\cdot x)$. Wir definieren $\tau : N' + Rx \longrightarrow Q$ durch $\tau(n' + rx) := \varphi'(n') + \sigma(r)$. Dieses ist eine wohldefinierte Abbildung, denn wenn $n' + rx = n'_1 + r_1 x$, dann ist $(r - r_1)x =$

$n_1' - n' \in N'$, also $r - r_1 \in I$. Damit ist $\sigma(r - r_1) = \varphi'((r - r_1)x) = \varphi'(n_1' - n')$ und $\varphi'(n') + \sigma(r) = \varphi'(n_1') + \sigma(r_1)$. Man sieht leicht, daß τ auch ein Homomorphismus ist. Da $\tau|_{N'} = \varphi'$ gilt, ist $(N' + Rx, \tau) \in \mathcal{S}$ und $(N', \varphi') \subsetneqq (N' + Rx, \tau)$ im Widerspruch zur Maximalität von (N', φ'). Also ist $N' = N$. □

Folgerung 5.11. *Wenn R ein halbeinfacher Ring ist, dann ist jeder R-Modul projektiv und injektiv.*

Beweis: Nach 5.4 ist jedes Ideal direkter Summand von R. Das folgende Diagramm zusammen mit dem Baerschen Kriterium zeigt, daß Q injektiv ist:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left] \arrow[d] & R \arrow[l, shift left] \arrow[dl] \\ Q. & \end{tikzcd}$$

Sei $f : N \longrightarrow P$ surjektiv. Da $\mathrm{Ke}(f) \subseteq N$ ein Untermodul und injektiv ist, gibt es ein $g : N \longrightarrow \mathrm{Ke}(f)$ mit $g(n) = n$ für alle $n \in \mathrm{Ke}(f)$. Wir definieren $k : P \longrightarrow N$ durch $k(p) = n - g(n)$ für ein $n \in N$ mit $f(n) = p$. Ist auch $f(n') = p$, dann ist $f(n - n') = 0$, also $n - n' \in \mathrm{Ke}(f)$ und $g(n - n') = n - n'$. Es folgt $n - g(n) = n' - g(n')$. Daher ist k eine wohldefinierte Abbildung. Weiter ist $fk(p) = f(n - g(n)) = f(n) - fg(n) = p - 0$, also $fk = 1_P$. Um zu zeigen, daß k ein Homomorphismus ist, sei $f(n) = p$, $f(n') = p'$. Dann gilt $f(rn + r'n') = rp + r'p'$. Es folgt $k(rp + r'p') = rn + r'n' - g(rn + r'n') = r(n - g(n)) + r'(n' - g(n')) = rk(p) + r'k(p')$. Das zeigt, daß P projektiv ist. □

Lemma 5.12. *Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge. M und P sind genau dann artinsch, wenn N artinsch ist. Insbesondere ist mit M, N auch $M \oplus N$ artinsch.*

Beweis: Sei N artinsch. Trivialerweise ist M artinsch. Wenn $\{L_i\}$ eine Menge von Untermoduln von P ist, dann ist $\{g^{-1}(L_i)\}$ eine Menge von Untermoduln von N. Sei $g^{-1}(L_0)$ minimal in dieser Menge. Wegen $gg^{-1}(L_i) = L_i$ ist dann auch L_0 minimal in $\{L_i\}$.
Seien M und P artinsch. Sei $\{L_i\}$ eine Menge von Untermoduln von N. Sei L_0 so gewählt, daß $g(L_0)$ minimal in der Menge $\{g(L_i)\}$ ist. Sei L so gewählt, daß $f^{-1}(L)$ minimal in der Menge $\{f^{-1}(L_j) | L_j \in \{L_i\}$ und $g(L_j) = g(L_0)\}$ ist. Wir zeigen, daß L minimal in $\{L_i\}$ ist. Sei $L' \in \{L_i\}$ mit $L \supseteq L'$. Dann ist $g(L_0) = g(L) \supseteq g(L')$, also $g(L') = g(L_0)$. Weiter ist $f^{-1}(L) \supseteq f^{-1}(L')$, also $L = L'$. □

Lemma 5.13. *Seien $R_1, \ldots, R_n$ halbeinfache Ringe. Dann ist auch $R_1 \times \ldots \times R_n$ ein halbeinfacher Ring.*

Beweis: (nur für den Fall $R_1 \times R_2$) Nach Lemma 5.12 ist $R_1 \times R_2$ artinsch. Sei $I \subseteq R$ nilpotent. Wegen $I^n = 0$ gilt für jedes $a \in I$ die Gleichung $(Ra)^n = 0$. Da $a = (a_1, a_2)$, folgt $0 = (Ra)^n = (R_1a_1, R_2a_2)^n$. Also sind $R_1a_1 = 0$ und $R_2a_2 = 0$, d.h. $Ra = 0$ und damit $I = 0$. □

Lemma 5.14. *Jeder echte Untermodul N eines endlich erzeugten Moduls M ist in einem maximalen Untermodul von M enthalten. Insbesondere besitzt M einen einfachen Faktormodul.*

Beweis: Sei $N \subsetneqq M$ ein echter Untermodul von M. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Untermoduln U mit $N \subseteq U \subsetneqq M$. $\mathcal{M}$ ist geordnet durch Inklusion. Sei (U_i) eine Kette in $\mathcal{M}$ und $U' := \cup U_i$. Dann ist U' wieder ein Untermodul und $N \subseteq U'$. Wenn $U' = M$ ist, dann liegen alle Erzeugenden $m_1, \ldots, m_t \in U'$, also gibt es einen Modul U_i mit $m_1, \ldots, m_t \in U_i$. Damit ist aber $U_i = M$.

Das kann nicht sein. Daher ist $U' \neq M$ und damit in $\mathcal{M}$. Weiter ist U' obere Schranke von (U_i). Nach dem Lemma von Zorn gibt es also einen maximalen Untermodul von M (in $\mathcal{M}$), der N umfaßt. $\square$

Lemma 5.15. (1) *Ist $X \subseteq {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ eine Erzeugendenmenge von $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Z}$ und $x \in X$, so ist auch $X \setminus \{x\}$ eine Erzeugendenmenge von $\mathbb{Q}$.*
(2) *${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ besitzt keine maximalen Untermoduln.*

Beweis: 1. Sei $B = \langle X \setminus \{x\}\rangle$. Es gilt $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}x + B$. Es gibt ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $2y = x$. Wir stellen y dar als $y = nx+b$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $b \in B$. Es folgt $x = 2y = 2nx+2b$ und daher $(1-2n)x = 2b \in B$. Es gibt weiter ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $(1-2n)z = x$, da offenbar $1-2n \neq 0$. Wir stellen z dar als $z = mx + b'$. Es folgt $x = (1-2n)z = (1-2n)mx + (1-2n)b' = 2mb + (1-2n)b' \in B$. Damit ist $B = \mathbb{Q}$ und x kann aus der Erzeugendenmenge fortgelassen werden.
2. Sei $N \subseteq \mathbb{Q}$ ein maximaler Untermodul und $x \in \mathbb{Q}\setminus N$. Dann ist $N \cup \{x\}$ Erzeugendenmenge von $\mathbb{Q}$, also auch N. Widerspruch. $\square$

Lemma 5.16. *Sei ${}_RM$ ein Modul, in dem jeder Untermodul ein direkter Summand ist. Dann enthält jeder Untermodul $0 \neq N \subseteq M$ einen einfachen Untermodul. Weiter ist M Summe von einfachen Untermoduln.*

Beweis: Sei $x \in N$, $x \neq 0$. Es genügt zu zeigen, daß Rx einen einfachen Untermodul besitzt. Da Rx endlich erzeugt ist, besitzt Rx einen maximalen Untermodul L. Da L direkter Summand von M ist, gibt es $f : M \longrightarrow L$ mit $(L \longrightarrow Rx \longrightarrow M \xrightarrow{f} L) = 1_L$, also ist $L \oplus I = Rx$, wobei $I = \mathrm{Ke}(Rx \longrightarrow M \longrightarrow L)$. Wenn $0 \neq J \subseteq I$, dann ist $L \subsetneqq L + J \subsetneqq Rx$ im Widerspruch dazu, daß L maximal in Rx ist. Also ist I einfach mit $I \subseteq Rx \subseteq N$.
Sei $N = \sum I_j$ Summe aller einfachen Untermoduln von M. Dann ist $M = N \oplus K$. Wenn $K \neq 0$ ist, dann enthält K einen einfachen Untermodul I und es gilt $I \subseteq N \cap K$. Widerspruch. Also ist $K = 0$ und $M = \sum I_j$. $\square$

Lemma 5.17. *Sei ${}_RM$ Summe von einfachen Untermoduln: $M = \sum_{j\in X} I_j$. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es eine Menge $Y \subseteq X$ mit $M = N \oplus \bigoplus_{j\in Y} I_j$ und eine Menge $Z \subseteq X$ mit $N \cong \bigoplus_{j\in Z} I_j$. Insbesondere ist jeder Untermodul N von M direkte Summe von einfachen Untermoduln.*

Beweis: Sei $\mathcal{S} = \{Z \subseteq X | N + (\sum_{j\in Z} I_j) = N \oplus (\bigoplus_{j\in Z} I_j)\}$. Die Menge $\mathcal{S}$ ist durch Inklusion geordnet und nicht leer, denn $\emptyset \in \mathcal{S}$. Sei (Z_i) eine Kette in $\mathcal{S}$. Dann ist $Z' := \cup Z_i \in \mathcal{S}$. Um das zu zeigen sei $n + \sum_{j\in Z'} a_j = 0$. Dann sind höchstens endlich viele $a_j \in I_j$ ungleich 0. Also gibt es ein Z_i aus der Kette mit $j \in Z_i$ für alle $a_j \neq 0$ aus der Summe. Wegen $N + (\sum_{j\in Z_i} I_j) = N \oplus (\bigoplus_{j\in Z_i} I_j)$ sind dann aber $n = 0 = a_j$ für alle $j \in Z'$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $Z'' \in \mathcal{S}$, und es gilt $P := N + (\sum_{j\in Z''} I_j) = N \oplus (\bigoplus_{j\in Z''} I_j)$. Sei I_k einfach mit $k \in X \setminus Z''$. Wenn $P + I_k = P \oplus I_k$, dann ist $N + (\sum_{j\in Z''} I_j) + I_k = N \oplus (\bigoplus_{j\in Z''} I_j) \oplus I_R$ im Widerspruch zur Maximalität von Z''. Also ist $0 \neq P \cap I_k \subseteq I_k$, also $I_k \subseteq P$. Daraus folgt $P = N + \sum_{j\in X} I_j = M$.
Wir wenden nun die erste Aussage auf $\bigoplus_{j\in Y} I_j$ an und erhalten $N \oplus (\bigoplus_{j\in Y} I_j) = M = (\bigoplus_{j\in Y} I_j) \oplus (\bigoplus_{j\in Z} I_j)$. Es folgt $N \cong M/(\bigoplus_{j\in Y} I_j) \cong \bigoplus_{j\in Z} I_j$. $\square$

Satz 5.18. *(Struktursatz für halbeinfache Moduln): Für ${}_RM$ sind äquivalent:*
(1) *Jeder Untermodul von M ist Summe von einfachen Untermoduln.*
(2) *M ist Summe von einfachen Untermoduln.*
(3) *M ist direkte Summe von einfachen Untermoduln.*
(4) *Jeder Untermodul von M ist direkter Summand.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2.: klar.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Lemma 5.17.
3. $\Longrightarrow$ 1.: Lemma 5.17.
2. $\Longrightarrow$ 4.: Lemma 5.17.
4. $\Longrightarrow$ 2.: Lemma 5.16. $\square$

Definition 5.19. Ein Modul $_RM$ heißt *halbeinfach*, wenn er eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 5.18 erfüllt.

Folgerung 5.20. (1) *Jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*
(2) *Jeder Faktor- (Restklassen-) Modul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.*
(3) *Jede Summe von halbeinfachen Moduln ist halbeinfach.*

Beweis: 1. klar.
2. Sei $N \subseteq M$. Dann gilt $M \cong N \oplus M/N$, insbesondere ist M/N isomorph zu einem Untermodul von M.
3. klar. $\square$

Bemerkung 5.21. Mit dem Begriff des halbeinfachen Moduls haben wir eine besonders gute Verallgemeinerung des Begriffes eines Vektorraumes gefunden. Wesentliche *Sätze der linearen Algebra* sind in Satz 5.18 verallgemeinert worden. Die einfachen Moduln über einem Körper sind genau die eindimensionalen Vektorräume. Die Bedingung 2. von Satz 5.18 ist trivialerweise erfüllt, denn jeder Vektorraum ist Summe von einfachen (eindimensionalen) Vektorräumen, man bilde einfach $V = \sum_{v \in V \setminus \{0\}} Kv$ oder aber $V = \sum_{v \in E} Kv$ für eine beliebige Erzeugendenmenge E von V. Daher ist jeder Vektorraum V halbeinfach. Daher gilt die Bedingung 3. Sie besagt dann, daß in jeder Erzeugendenmenge E eine Basis existiert. 4. ist die wichtige Feststellung, daß jeder Unterraum ein direktes Komplement besitzt. Lemma 5.17 enthält darüber hinaus Aussagen über die Dimension von Vektorräumen, Unterräumen und Restklassenräumen.

Satz 5.22. (Wedderburn) *Äquivalent sind für R:*
(1) *$_RR$ ist halbeinfach (als Ring).*
(2) *Jeder R-Modul ist projektiv.*
(3) *Jeder R-Modul ist injektiv.*
(4) *Jeder R-Modul ist halbeinfach.*
(5) *$_RR$ ist halbeinfach (als R-Modul).*
(6) *R ist direkte Summe von einfachen Linksidealen.*
(7) *$R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$ mit einfachen Ringen R_i $(i = 1, \ldots, n)$.*
(8) *$R \cong B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, wobei die B_i minimale zweiseitige Ideale sind, und $_RR$ ist artinsch.*
(9) *R_R ist halbeinfach (als Ring).*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 3. : Folgerung 5.11.
3. $\Longrightarrow$ 4. : Satz 5.18.4. und Satz 5.10.3.
4. $\Longrightarrow$ 5. : Spezialisierung.
5. $\Longrightarrow$ 6. : Satz 5.18.3.
6. $\Longrightarrow$ 3. : Satz 5.18.4. und 5.11.
6. $\Longrightarrow$ 2. : Satz 5.18.4. und 5.11.
2. $\Longrightarrow$ 4. : Sei $N \subseteq M$ Untermodul. Dann ist M/N projektiv, und es gibt $f : M/N \longrightarrow M$ mit $(M/N \longrightarrow M \longrightarrow M/N) = \mathrm{id}$ oder $(M \longrightarrow M/N \longrightarrow M) = p$ mit $p^2 = p$. Also ist $M = \mathrm{Ke}(p) \oplus \mathrm{Bi}(p)$ und $\mathrm{Ke}(p) = N$.
6. $\Longrightarrow$ 8. : Sei $R = I_{11} \oplus \ldots \oplus I_{1i_1} \oplus I_{21} \oplus \ldots \oplus I_{2i_2} \oplus \ldots \oplus I_{n1} \oplus \ldots \oplus I_{ni_n}$ direkte Summe von einfachen Idealen, endlich viele, weil R endlich erzeugt ist, und seien $I_{ij} \cong I_{ik}$ für alle i, j, k und $I_{i1} \not\cong I_{j1}$ für $i \neq j$. Seien $B_k := \bigoplus_{j=1}^{i_k} I_{kj}$.

Sei $I \subseteq R$ einfach. Sei $p_k : R \longrightarrow B_k$ die Projektion auf B_k bzgl. $R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$. Es gibt mindestens ein k mit $p_k(I) \neq 0$. Dann ist $I \cong p_k(I) = J \subseteq B_k$ ein einfaches Ideal. Wegen 5.17 gilt $I \oplus (\bigoplus_{j=r+1}^m I_{kj}) = B_k = I_{k1} \oplus \ldots \oplus I_{kr} \oplus (\bigoplus_{j=r+1}^m I_{kj})$ bei geeigneter Numerierung. Also ist $J \cong I_{k1} \oplus \ldots \oplus I_{kr}$ und daher $r = 1$ und $I \cong J \cong I_{k1}$. Damit gibt es genau ein k mit $p_k(I) \neq 0$. Insbesondere gilt dann $I \subseteq B_k$. Ist $f : {}_RR \longrightarrow {}_RR$ mit $f(I) \neq 0$ gegeben, so ist $f(I) \cong I$ einfach und $f(I) \subseteq B_k$ für ein K. Daher gilt $f(B_k) \subseteq B_k$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_R(.R, .R) \cong R$, und es ist B_k ein zweiseitiges Ideal.
Man beachte, daß $B_iB_j \subseteq B_i \cap B_j = 0$ gilt. Für $1 \in R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ sei $1 = e_1 + \ldots + e_n$ mit $e_i \in B_i$. Für $b \in B_i$ gilt $e_ib = (e_1 + \ldots + e_n)(0 + \ldots + b + \ldots + 0) = b = be_i$. Daher kann man B_i als Ring mit Einselement e_i auffassen. (B_i ist kein Unterring von R, sondern ein Restklassenring von R.) Wegen $B_iB_j = 0$ ist $L \subseteq B_i$ ein (einseitiges bzw. zweiseitiges) B_i-Ideal von B_i genau dann, wenn L ein R-Ideal ist. Da $B_i = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ direkte Summe von einfachen R-Idealen bzw. B_i-Idealen ist, und da $I_j \cong I_k$ gilt, ist B_i nach 5.7 ein einfacher Ring. Insbesondere besitzt B_i keine zweiseitigen nicht-trivialen Ideale, d.h. die zweiseitigen Ideale $B_i \subseteq R$ sind minimal. Mit 5.12 zeigt man, daß R artinsch ist.
8. $\Longrightarrow$ 7.: Wegen $B_iB_j \subseteq B_i \cap B_j = 0$ sind die B_i wie zuvor einfache Ringe, also ist $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ mit $R_i = B_i$, weil Addition und Multiplikation in den B_i (komponentenweise) verlaufen.
7. $\Longrightarrow$ 1.: Lemma 5.12.
7. $\Longrightarrow$ 9.: Damit die Bedingung 7. symmetrisch in den Seiten ist, genügt es zu zeigen, daß ein einfacher Ring R rechts-artinsch ist. Aber $R \cong M_n(D) \cong \mathrm{Hom}_D(V^*., V.^*)$ ist links- und rechts-artinsch. $\square$

6. Noethersche Moduln

Definition 6.1. Ein Modul ${}_FM$ heißt *noethersch* (Emmy Noether 1882-1935), wenn jede nichtleere Menge von Untermoduln von M ein maximales Element besitzt.

Satz 6.2. *Äquivalent sind ${}_RM$:*

(1) *M ist noethersch.*
(2) *Jede aufsteigende Kette $M_i \subseteq M_{i+1}, i \in \mathbb{N}$ von Untermoduln von M wird stationär, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_n = M_{n+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*
(3) *Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Beweis: 2. $\Longrightarrow$ 1.: Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln ohne maximales Element. Mit dem Auswahlaxiom wählen wir zu jedem $N \in \mathcal{M}$ ein $N' \in \mathcal{M}$ mit $N \subsetneqq N'$. Für $N \in \mathcal{M}$ haben wir dann eine aufsteigende Kette $M_1 = N, M_{i+1} = M_i'$ mit $M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_i \subsetneqq M_{i+1} \subsetneqq \ldots$. Das ist nach 2. nicht möglich.
1. $\Longrightarrow$ 3.: Sei $M' \subseteq M$. Dann hat $\{N | N \subseteq M', N \text{ endlich erzeugt }\} \neq \emptyset$ ein maximales Element N'. Wenn $N' \neq M'$, dann gibt es ein $m \in M' \setminus N'$. Es ist $N' + Rm \subseteq M'$ endlich erzeugt und $N' \subsetneqq N' + Rm$ im Widerspruch zur Maximalität von N'. Also gilt $N' = M'$, d.h. M' ist endlich erzeugt.
3. $\Longrightarrow$ 2.: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots \subseteq M$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Sei $N := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. N ist endlich erzeugter Untermodul von M, d.h. $N = Ra_1 + \ldots + Ra_n$. Dann gibt es ein M_r mit $a_1, \ldots, a_n \in M_r$. Daraus folgt $M_r = N = M_{r+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. die Kette wird stationär. $\square$

Lemma 6.3. *Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge. M und P sind genau dann noethersch, wenn N noethersch ist. Insbesondere ist mit M, N auch $M \oplus N$ noethersch.*

Beweis: Sei N noethersch. Trivialerweise ist M noethersch. Wenn $\{L_i\}$ eine Menge von Untermoduln von P ist, dann ist $\{g^{-1}(L_i)\}$ eine Menge von Untermoduln von N. Sei $g^{-1}(L_0)$ maximal in dieser Menge. Wegen $gg^{-1}(L_i) = L_i$ ist dann auch L_0 maximal in $\{L_i\}$.
Seien M und P noethersch. Sei $\{L_i\}$ eine Menge von Untermoduln von N. Sei L_0 so gewählt, daß $g(L_0)$ maximal in der Menge $\{g(L_i)\}$ ist. Sei L so gewählt, daß $f^{-1}(L)$ maximal in der Menge $\{f^{-1}(L_j)|L_j \in \{L_i\}$ und $g(L_j) = g(L_0)\}$ ist. Wir zeigen, daß L maximal in $\{L_i\}$ ist. Sei $L' \in \{L_i\}$ mit $L \subseteq L'$. Dann ist $g(L_0) = g(L) \subseteq g(L')$, also $g(L') = g(L_0)$. Weiter ist $f^{-1}(L) \subseteq f^{-1}(L')$, also $L = L'$. □

Folgerung 6.4. *${}_RR$ noethersch als Linksmodul genau dann, wenn alle endlich erzeugten R-Linksmoduln noethersch sind.*

Beweis: $\Longleftarrow$: klar.
$\Longrightarrow$: Wenn M endlich erzeugt ist, dann gibt es eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow K \longrightarrow R\oplus\ldots\oplus R \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Da R noethersch ist, ist auch $R \oplus \ldots \oplus R$ noethersch, also auch M. □

Satz 6.5. (Hilbertscher Basissatz) *Wenn R links-noethersch ist, dann ist auch $R[x]$ links-noethersch.*

Beweis: Sei $J \subseteq R[x]$ ein Ideal. Wir müssen zeigen, daß J endlich erzeugt ist. Sei $J_0 := \{r \in R|\exists p(x) \in J$ mit höchstem Koeffizienten $r\}$. (Der höchste Koeffizient des Null-Polynoms ist 0.) $J_0 \subseteq R$ ist ein Ideal, also gilt $J_0 = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle$. Seien $p_i(x) \in J$ zu den r_i mit höchstem Koeffizienten r_i gewählt. Sei $m \geq \mathrm{grad}(p_i(x))$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $g \in J$ mit $\mathrm{grad}(g) \geq m$. Dann ist $g = sx^t + \sum_{i\leq t} s_i x^i$. Da $s \in J_0$, gilt $s = \sum_{j=1}^n \lambda_j r_j$. Es folgt $g_1 := g - \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(x) x^{t-\mathrm{grad}(p_j(x))} \in J$ und $\mathrm{grad}(g_1) \leq t-1$. Durch Induktion ist $g = g_0 + \overline{g}$ mit $g_0 \in \sum_{j=1}^n R[x]p_j(x)$ und $\mathrm{grad}(\overline{g}) < m$. Es folgt $\overline{g} \in J \cap (R + Rx + \ldots + Rx^{m-1}) \subseteq R + Rx + \ldots + Rx^{m-1}$. Beide R-Moduln sind endlich erzeugt, also ist $\overline{g} = \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(X)$ mit $\langle q_1(x), \ldots, q_k(x)\rangle = J \cap (R + Rx + \ldots + Rx^{m-1})$. Damit ist $\{p_1(x), \ldots, p_n(x), q_1(x), \ldots, q_k(x)\}$ eine Erzeugendenmenge von J. □

Folgerung 6.6. *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und sei S eine kommutative R-Algebra. Sei S als R-Algebra endlich erzeugt (d.h. es gibt $s_1, \ldots, s_n$, so daß für alle $s \in S$ Darstellungen $s = \sum r_{i_1,\ldots,i_n} s_1^{i_1} \ldots s_n^{i_n}$ existieren). Dann ist S noethersch.*

Beweis: 1. Durch Induktion ist $R[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch.
2. Es gibt einen Epimorphismus $R[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S$. Damit ist S ein noetherscher $R[x_1, \ldots, x_n]$-Modul, also auch ein noetherscher S-Modul. □

Satz 6.7. *Sei $N \subseteq M$ und M endlich erzeugt. Sei R kommutativ oder M noethersch. Sei $f : N \longrightarrow M$ ein Epimorphismus. Dann ist f ein Isomorphismus.*

Beweis. : 1. Sei M noethersch. Wir konstruieren eine aufsteigende Folge $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ durch $K_0 := \mathrm{Ke}(f) = f^{-1}(0), K_i := f^{-1}(K_{i-1})$. Wegen $K_{i-2} \subseteq K_{i-1}$ ist $K_{i-1} = f^{-1}(K_{i-2}) \subseteq f^{-1}(K_{i-1}) = K_i$. Da M noethersch ist, wird die Kette stationär $K_n = K_{n+1} = \ldots$. Sei $x_0 \in K_0$. Dann gibt es $x_1 \in K_1$ mit $f(x_1) = x_0$, da f ein Epimorphismus ist. Also existieren $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $f(x_i) = x_{i-1}$ und $f^{n+1}(x_{n+1}) = f^n(x_n) = \ldots = f(x_1) = x_0$. Da $x_{n+1} \in K_n$, ist $f(x_{n+1}) \in K_{n-1}$ und damit $f^n(x_{n+1}) \in K_0$ und $x_0 = f^{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Damit ist f ein Monomorphismus.
2. Sei R kommutativ. Sei $M = Ry_1 + \ldots + Ry_n$. Seien $x_i \in N_i$ mit $f(x_i) = y_i$. Sei $x_0 \in N$ mit $f(x_0) = 0$. Dann gibt es Koeffizienten $r_{ij} \in R$ mit $x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j, i = 0, \ldots, n$. Wir betrachten $R' := \mathbb{Z}[r_{ij}] \subseteq R$, den von den r_{ij} erzeugten Unterring von R. Da $\mathbb{Z}$ noethersch und R' endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Algebra sind, ist R' noethersch. Sei $M' := \sum R'y_i$ und $N' = \sum R'x_i$. Dann ist $N' \subseteq M'$ ein R'-Untermodul, M' ist als R'-Modul endlich erzeugt, also noethersch,

und $f(x_i) = y_i, f(x_0) = 0$ erzeugen einen R'-Homomorphismus $f' : N' \longrightarrow M'$. Da f' surjektiv ist, ist f' injektiv und daher $x_0 = 0$. Damit ist f injektiv. □

Folgerung 6.8. *Sei R kommutativ oder ${}_RM$ noethersch. Sei $M = Ry_1 + \ldots + Ry_m$. Sei $N \subseteq M$ ein freier Untermodul mit den freien Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$. Dann ist $n \leq m$. Ist $n = m$, so ist M frei über $y_1, \ldots, y_m$.*

Beweis: Da N frei ist, gibt es einen Homomorphismus $f : N \longrightarrow M$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, \min(m, n)$ und $f(x_i) = 0$ sonst. Ist $n \geq m$, so ist f surjektiv, also bijektiv, also folgt $n \leq m$. Ist $n = m$, so ist f bijektiv und M frei mit den Erzeugenden $y_1, \ldots, y_n$. □

Folgerung 6.9. *Sei R kommutativ oder noethersch. Sei M frei über $x_1, \ldots, x_n$ und frei über $y_1, \ldots, y_m$. Dann ist $m = n$.*

Beweis: Wenn R noethersch ist, dann ist M ebenfalls noethersch. Dann folgt die Aussage aus 6.8. □

Definition 6.10. Sei R kommutativ oder noethersch. Der *Rang* eines endlich erzeugten freien Moduls ${}_RM$ ist die nach 6.9 eindeutig bestimmte Anzahl der freien Erzeugenden.

Beispiel 6.11. Der Endomorphismenring eines abzählbar unendlichdimensionalen Vektorraumes ist weder rechts noch links noethersch.

Beweis: Aus $ap + bq = 1, pa = 1, qb = 1, pb = 0, qa = 0$ folgt wie in der Präsenzübung ${}_RR = {}_RRp \oplus {}_RRq$ frei und $R_R = aR_R \oplus bR_R$ frei. □

Definition 6.12. Ein Element $r \in R$ in einem Ring R heißt *Links-Einheit* (*Rechts-Einheit*), Wenn $rR = R$ ($Rr = R$) gilt. $r \in R$ heißt *Einheit*, wenn $Rr = R = rR$ gilt.

Lemma 6.13. *Wenn $r \in R$ eine Einheit ist, dann gibt es genau ein $s \in R$ mit $sr = 1$. Weiter gilt $rs = 1$.*

Beweis: Sei $sr = s'r = 1$ und sei $rt = 1$. Dann gilt $s = s1 = srt = 1t = t$ und analog $s' = t$. □

Folgerung 6.14. *In jedem links-noetherschen Ring R ist jede Rechtseinheit $x \in R$ (d.h. $Rx = R$) auch Links-Einheit und umgekehrt.*

Beweis: Sei $Rx = R$. Dann ist $\cdot x : R \longrightarrow R$ ein Epimorphismus, also ein Isomorphismus. Also gibt es einen inversen Isomorphismus $g : R \longrightarrow R$ mit $g \in \mathrm{Hom}_R(.R, .R) \cong R$, also $g = \cdot y$. Es folgt $1 \cdot x \cdot y = 1$ und $1 \cdot y \cdot x = 1$, d.h. $x^{-1} = y$. Wenn $xR = R$ gilt, dann gibt es ein $y \in R$ mit $xy = 1$. Es folgt $Ry = R$, also gibt es wie zuvor ein $z \in R$ mit $zy = yz = 1$ und $x = x \cdot 1 = xyz = 1 \cdot z = z$. □

7. Radikal und Sockel

Definition 7.1. (1) $N \subseteq M$ heißt *groß* (*essential, wesentlich*) genau dann, wenn gilt

$$\forall U \subseteq M : N \cap U = 0 \Longrightarrow U = 0.$$

(2) $N \subseteq M$ heißt *klein* (*superfluous, überflüssig*) genau dann, wenn gilt

$$\forall U \subseteq M : N + U = M \Longrightarrow U = M.$$

Lemma 7.2. *Seien $N \subseteq M \subseteq P$, $U \subseteq P$ Untermoduln. Dann gilt das* modulare Gesetz*:*

$$N + (U \cap M) = (N + U) \cap M.$$

Beweis: $\subseteq$: Aus $n+u \in N+U$ mit $n \in N$ und $u \in U \cap M \subseteq M$ folgt $n+u \in M$, also $n+u \in (N+U)\cap M$.
$\supseteq$: Aus $n+u = m \in (N+U)\cap M$ folgt $u = m-n \in M \cap U$, also $n+u \in N+(U\cap M)$. $\square$

Lemma 7.3. (1) *Seien $N \subseteq N' \subseteq M' \subseteq M$ Untermoduln und sei N groß in M. Dann ist N' groß in M'.*
(2) *Seien $N \subseteq N' \subseteq M' \subseteq M$ Untermoduln und sei N' klein in M'. Dann ist N klein in M.*
(3) *Seien $N, N' \subseteq M$ große Untermoduln in M. Dann ist $N \cap N'$ groß in M.*
(4) *Seien $N, N' \subseteq M$ kleine Untermoduln in M. Dann ist $N + N'$ klein in M.*

Beweis: 1. Sei $U \subseteq M'$ mit $N' \cap U = 0$. Dann ist $N \cap U = 0$, also $U = 0$.
2. Sei $U \subseteq M$ mit $N + U = M$. Dann ist $N + (U \cap M') = (N+U)\cap M' = M \cap M' = M'$, also ist $U \cap M' = M'$ und damit $M' \subseteq U$. Es folgt $N \subseteq U$ und $N + U = M$, also $U = M$.
3. Sei $(N \cap N') \cap U = 0$. Dann ist $N \cap (N' \cap U) = 0$, also $N' \cap U = 0$ und damit $U = 0$.
4. Sei $(N + N') + U = M$. Dann ist $N + (N' + U) = M$, also $N' + U = M$ und damit $U = M$. $\square$

Lemma 7.4. *Seien $N, U \subseteq M$ Untermoduln.*
(1) *Wenn N maximal bzgl. der Bedingung $N \cap U = 0$ ist, dann ist $N+U \subseteq M$ ein großer Untermodul.*
(2) *Wenn N minimal bzgl. der Bedingung $N + U = M$ ist, dann ist $N \cap U \subseteq M$ ein kleiner Untermodul.*
(3) *Es gibt einen Untermodul N, der maximal bzgl. $N \cap U = 0$ ist.*

Beweis: 1. Sei $V \subseteq M$ mit $(N+U)\cap V = 0$. Dann ist $N \cap U = 0$. Sei $n+v = u \in (N+V)\cap U$. Es folgt $v = u - n \in (N+U)\cap V = 0$, also ist $n = u \in N \cap U = 0$ und damit $(N+V)\cap U = 0$. Daher ist $N + V = N$, weil N maximal bzgl. $N \cap U = 0$ ist. Daraus folgt $V \subseteq N$, also $V \subseteq (N+U)\cap V = 0$ und $V = 0$. Damit ist $N + U \subseteq M$ groß.
2. Sei $V \subseteq M$ mit $(N\cap U)+V = M$. Dann ist $N+U = M$. Sei $m \in M$ mit $m = n+u \in N+U$. Sei weiter $n = n' + v$ mit $n' \in N \cap U$ und $v \in V$ (weil $n \in M$). Es folgt $v \in V \cap N$ und $m = (n'+u)+v \in U+(V\cap N)$ und daher $(N\cap V)+U = M$. Da N minimal bzgl. $N+U = M$ ist, ist $N = N \cap V$, also $N \subseteq V$. Daraus und aus $(N\cap U)+V = M$ folgt $V = M$. Damit ist $N \cap U \subseteq M$ klein.
3. Die Menge $\mathcal{V} := \{V \subseteq M | V \cap U = 0\}$ ist induktiv geordnet, denn sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Kette in $\mathcal{V}$ und sei $x \in (\cup V_i)\cap U$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in V_i \cap U$, also ist $x = 0$. Damit ist $\cup V_i$ in $\mathcal{V}$ obere Schranke der V_i. Folglich gibt es einen Untermodul N von M, der maximal ist bzgl. $N \cap U = 0$. $\square$

Lemma 7.5. *$N \subseteq M$ ist genau dann groß, wenn gilt*

$$\forall m \in M \setminus \{0\}\ \exists r \in R : rm \in N \setminus \{0\}.$$

Beweis: $N \subseteq M$ groß $\Longleftrightarrow [\forall U \subseteq M : N \cap U = 0 \Longrightarrow U = 0] \Longleftrightarrow [\forall U \subseteq M : U \neq 0 \Longrightarrow N \cap U \neq 0] \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} [\forall Rm \subseteq M : Rm \neq 0 \Longrightarrow N \cap Rm \neq 0] \Longleftrightarrow [\forall m \in M \setminus \{0\}\ \exists r \in R : rm \in N \setminus \{0\}]$. Lediglich eine Richtung von $(*)$ benötigt eine zusätzliche Überlegung. Wenn $U \neq 0$ und die rechte Seite von $(*)$ gelten, so existiert ein $m \in U$ mit $Rm \neq 0$. Also ist $0 \neq N \cap Rm \subseteq N \cap U$. $\square$

Lemma 7.6. *Sei $Rm \subseteq M$ nicht klein. Dann existiert ein Untermodul $N \subseteq M$, der ein maximaler Untermodul ist und der m nicht enthält.*

Beweis: Die Menge $\mathcal{S} := \{U \subsetneqq M | Rm + U = M\}$ ist nicht leer, weil Rm nicht klein in M ist. $\mathcal{S}$ ist induktiv geordnet. Sei nämlich $(U_i | i \in I)$ eine Kette in $\mathcal{S}$. Dann gilt $m \notin U_i$ für alle $i \in I$. Also ist $\cup U_i \subsetneqq M$ und offenbar $Rm + (\cup U_i) = M$. Daher gibt es ein maximales Element N in $\mathcal{S}$. Sei $N \subsetneqq N' \subseteq M$. Dann ist $N' + Rm = M$. Da aber $N' \notin \mathcal{S}$, ist $N' = M$, also ist N ein maximaler Untermodul. Offenbar ist $m \notin N$. $\square$

Definition 7.7. (1) $\mathrm{Radikal}(M) = \mathrm{Rad}(M) := \cap\{U \subsetneqq M | U$ maximaler Untermodul$\}$,
(2) $\mathrm{Sockel}(M) = \mathrm{Soc}(M) := \sum\{U \subseteq M | U$ einfacher Untermodul$\}$.

Satz 7.8. (1) $\mathrm{Rad}(M) = \sum\{V \subseteq M$ *klein*$\}$;
(2) $\mathrm{Soc}(M) = \cap\{V \subseteq M$ *groß*$\}$.

Beweis: 1. $\supseteq$: Sei $V \subseteq M$ klein. Für alle maximalen Untermoduln $U \subseteq M$ gilt $U \subseteq U + V \subsetneqq M$, weil V klein und $U \neq M$ ist. Es folgt $U = U + V$ und $V \subseteq U$. Daher ist $V \subseteq \cap U$ und damit $\sum V \subseteq \cap U$.
$\subseteq$: Wenn Rm nicht klein in M ist, dann gibt es nach 7.6 einen maximalen Untermodul N in M mit $m \notin N$. Also ist $m \notin \cap U = \mathrm{Rad}(M) \subseteq N$. Wenn also $m \in \mathrm{Rad}(M)$ gilt, dann ist Rm klein in M. Damit ist $m \in \sum\{V \subseteq M$ klein$\}$.
2. $\subseteq$: Sei V groß in M und U einfach. Dann gilt $V \cap U \neq 0$, also $V \cap U = U$ und damit $U \subseteq V$. Es folgt $\sum U \subseteq \cap V$.
$\supseteq$: Wir zeigen zunächst, daß jeder Untermodul von $\cap V_i$ direkter Summand von $\cap V_i$ ist. Sei $N \subseteq \cap V_i$ gegeben. Sei X maximal in M mit $N \cap X = 0$ (Lemma 7.4.3.). Dann ist $N + X = V \subseteq M$ groß nach Lemma 7.4.1. Es folgt $N + (X \cap (\cap V_i)) = (N + X) \cap (\cap V_i)$ (Lemma 7.2) $= V \cap (\cap V_i) = \cap V_i$ und $N \cap (X \cap (\cap V_i)) = 0$. Damit ist $N \oplus (X \cap (\cap V_i)) = \cap V_i$. Aus Satz 5.16 folgt, daß $\cap V_i$ Summe von einfachen Untermoduln von $\cap V_i$ ist. Also ist $\cap V_i$ enthalten in der Summe der einfachen Untermoduln von M, d.h. dem Sockel von M. $\square$

Bemerkung 7.9. Ein Modul M ist genau dann halbeinfach, wenn er mit seinem Sockel übereinstimmt.

Folgerung 7.10. $m \in \mathrm{Rad}(M) \iff Rm \subseteq M$ *klein.*

Beweis: $\Longleftarrow$: nach Satz 7.8.
$\Longrightarrow$: wurde im Beweis von Satz 7.8 explizit festgehalten. $\square$

Folgerung 7.11. *Jeder endlich erzeugte Untermodul von* $\mathrm{Rad}(M)$ *ist klein in* M.

Beweis: Nach 7.10 sind $Rm_1, \ldots, Rm_n \subseteq M$ klein, wenn $m_1, \ldots, m_n \in \mathrm{Rad}(M)$. Nach 7.3.4 ist dann $\sum_{i=1}^n Rm_i$ in M klein. $\square$

Satz 7.12. *Sei M endlich erzeugt. Dann ist* $\mathrm{Rad}(M)$ *klein in* M.

Beweis: Da M endlich erzeugt ist, ist jeder echte Untermodul von M in einem maximalen Untermodul enthalten (5.14). Sei $N \subsetneqq M$ und U maximaler Untermodul mit $N \subseteq U \subsetneqq M$. Dann ist $\mathrm{Rad}(M) \subseteq U$ also $\mathrm{Rad}(M) + N \subseteq U \subsetneqq M$. Daher ist $\mathrm{Rad}(M)$ klein in M. $\square$

Satz 7.13. *Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann gelten*
(1) $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N)$.
(2) $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

Beweis: 1. Sei $U \subseteq M$ klein. Sei $V \subseteq N$ mit $f(U) + V = N$. Es folgt $f^{-1}(f(U) + V) = f^{-1}(N) = M = U + f^{-1}(V)$, denn aus $f(x) = f(u) + v$ folgt $f(x - u) = v, x - u \in f^{-1}(V)$ und daher $x \in U + f^{-1}(V)$, also $f^{-1}(f(U) + V) \subseteq U + f^{-1}(V)$. Da U klein ist, ist $f^{-1}(V) = M$. Daraus folgt $f(f^{-1}(V)) = f(M) \subseteq V$, also $f(U) \subseteq V$ und damit $V = N$. Also ist $f(U)$ klein in M. Wir haben somit $f(\mathrm{Rad}(M)) = \sum_{U \text{klein}} f(U) \subseteq \sum_{V \text{klein}} V = \mathrm{Rad}(N)$.
2. Sei $U \subseteq M$ einfach. Dann ist $f(U) \subseteq N$ einfach oder 0. Daher gilt $f(\sum U_i) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$. $\square$

Folgerung 7.14. Rad *und* Soc *sind kovariante Unterfunktoren von* Id : R-**Mod**$\longrightarrow$ R-**Mod**.

Folgerung 7.15. (1) *Sei* $U \subseteq M$ *klein und* $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. *Dann ist* $f(U) \subseteq N$ *klein.*
(2) *Sei* $U \subseteq N$ *groß und* $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. *Dann ist* $f^{-1}(U) \subseteq M$ *groß.*

Beweis: 1. wurde in Satz 7.13.1 bewiesen.
2. Sei $V \subseteq M$ und $f^{-1}(U) \cap V = 0$. Dann ist $f(f^{-1}(U) \cap V) = 0 = ff^{-1}(U) \cap f(V)$, denn wenn $x \in ff^{-1}(U) \cap f(V)$ mit $x = f(v)$, dann ist $f(v) \in U$ wegen $ff^{-1}(U) \subseteq U$.Es folgt $v \in f^{-1}(U) \cap V$, also $x \in f(f^{-1}(U) \cap V) = 0$. Daraus folgt jetzt $0 = ff^{-1}(U) \cap f(V) = U \cap \mathrm{Bi}(f) \cap f(V) = U \cap f(V)$ und damit $f(V) = 0$, weil U groß in N ist. Also ist $V \subseteq \mathrm{Ke}(f) \subseteq f^{-1}(U)$ und wegen $f^{-1}(U) \cap V = 0$ folgt $V = 0$. Daher ist $f^{-1}(U)$ groß in M. □

Folgerung 7.16. (1) $\mathrm{Rad}({}_RR)M \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.
(2) $\mathrm{Soc}({}_RR)M \subseteq \mathrm{Soc}(M)$.

Beweis: Sei $m \in M$. Dann ist $(R \ni r \mapsto rm \in M) \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$. Es folgt $\mathrm{Rad}({}_RR)m \subseteq \mathrm{Rad}(M)$, $\mathrm{Soc}({}_RR)m \subseteq \mathrm{Soc}(M)$ und daraus die Behauptung. □

Folgerung 7.17. $\mathrm{Rad}({}_RR)$ *und* $\mathrm{Soc}({}_RR)$ *sind zweiseitige Ideale.*

Satz 7.18. *Sei* $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ *und* $\mathrm{Ke}(f) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$. *Dann gilt*

$$f(\mathrm{Rad}(M)) = \mathrm{Rad}(f(M)).$$

Beweis: $\subseteq$: folgt aus 7.13.
$\supseteq$: Sei $f(m) \in \mathrm{Rad}(f(M))$. Wenn $Rm \subseteq M$ klein ist, dann ist $m \in \mathrm{Rad}(M)$ und $f(m) \in f(\mathrm{Rad}(M))$. Wenn $Rm \subseteq M$ nicht klein ist, dann gibt es nach 7.6 einen maximalen Untermodul $U \subsetneqq M$ mit $m \notin U$. Es gilt $Rm + U = M$ und damit $f(U) + Rf(m) = f(M)$. Wegen $f(m) \in \mathrm{Rad}(f(M))$ ist $Rf(m) \subseteq f(M)$ klein. Es folgt $f(U) = f(M)$ und daraus $U + \mathrm{Ke}(f) = M$. Aus der Voraussetzung $\mathrm{Ke}(f) \subseteq \mathrm{Rad}(M) \subseteq U$ folgt $U = M$, Widerspruch. □

Folgerung 7.19. *Sei* $N \subseteq M$ *ein Untermodul. Dann gelten*
(1) $(\mathrm{Rad}(M) + N)/N \subseteq \mathrm{Rad}(M/N)$.
(2) $N \subseteq \mathrm{Rad}(M) \Longrightarrow \mathrm{Rad}(M)/N = \mathrm{Rad}(M/N)$.

Beweis: 1. Mit $f : M \longrightarrow M/N$ gilt $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(M/N)$ und $f(\mathrm{Rad}(M)) = (\mathrm{Rad}(M)+N)/N$.
2. Aus $N = \mathrm{Ke}(f) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$ folgt die Behauptung. □

Folgerung 7.20. $\mathrm{Rad}(M)$ *ist der kleinste Untermodul* $U \subseteq M$ *mit* $\mathrm{Rad}(M/U) = 0$.

Beweis: Es ist $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M)) = \mathrm{Rad}(M)/\mathrm{Rad}(M) = 0$. Wenn $\mathrm{Rad}(M/U) = 0$ ist, dann folgt $\mathrm{Rad}(M) + U/U = 0$ und damit $\mathrm{Rad}(M) + U = U$. Also ist $\mathrm{Rad}(M) \subseteq U$. □

Lemma 7.21. *Wenn* $\mathrm{Soc}(M) = M$ *gilt, dann ist* $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

Beweis: Wenn $\mathrm{Soc}(M) = M$ gilt, dann ist M halbeinfach. Also ist kein Untermodul klein und daher $\mathrm{Rad}(M) = 0$. □

Lemma 7.22. *Sei* M *artinsch. Dann gilt*

$$\mathrm{Rad}(M) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Soc}(M) = M.$$

Beweis: Sei M artinsch und $\mathrm{Rad}(M) = 0$. Sei $U \subseteq M$ und N minimal mit $N + U = M$. Nach 7.4.2 ist $N \cap U \subseteq M$ klein, also $N \cap U = 0$. Daher ist U direkter Summand von M, M ist halbeinfach und $M = \mathrm{Soc}(M)$. □

Satz 7.23. *Äquivalent sind für M:*

(1) *M ist endlich erzeugt und halbeinfach.*
(2) *M ist artinsch und* $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Wenn M halbeinfach ist, dann ist M genau dann endlich erzeugt, wenn M artinsch ist. Wenn M halbeinfach ist, dann ist $M = \oplus U_i$ mit einfachen Moduln U_i. M ist genau dann endlich erzeugt, wenn die direkte Summe nur endlich viele Summanden hat. Ist M artinsch, so hat die direkte Summe nur endlich viele Summanden. Ist die direkte Summe endlich, so kann es nur endlich viele direkte Komplemente zu einer absteigenden Kette $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ in M gemäß 5.17 geben. Daher muß eine solche Kette stationär werden, d.h. M ist artinsch. □

Satz 7.24. (Lemma von Nakayama) *Für ${}_RI \subseteq {}_RR$ sind äquivalent:*

(1) $I \subseteq \mathrm{Rad}({}_RR)$.
(2) $1 + I$ *besteht nur aus Rechtseinheiten.*
(3) $1 + I$ *besteht nur aus Einheiten.*
(4) $1 + IR$ *besteht nur aus Einheiten.*
(5) $IM = M \Longrightarrow M = 0$ *für alle endlich erzeugten Moduln* ${}_RM$.
(6) $IM + U = M \Longrightarrow U = M$ *für alle endlich erzeugten Moduln* ${}_RM$.
(7) $IM \subseteq \mathrm{Rad}({}_RM)$ *für alle endlich erzeugten Moduln* ${}_RM$.

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2.: $\mathrm{Rad}(R) \subseteq R$ ist klein. Also ist $I \subseteq R$ klein. Aus $R(1 + i) + I = R$ folgt also $R(1 + i) = R$. Damit ist $1 + i$ eine Rechtseinheit.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Sei $k(1 + i) = 1$. Es folgt $ki = 1 - k \in I$ und damit auch $k - 1 \in I$. Damit ist $k = 1 + (k - 1)$ eine Rechtseinheit. Da k außerdem eine Linkseinheit ist, ist $(1 + i)k = 1$, also $1 + i$ eine Einheit.
3. $\Longrightarrow$ 4.: Sei $i \in I$ und $r \in R$. Dann ist $1 + ri$ eine Einheit mit Inversem $(1 + ri)^{-1}$. Wegen $(1 - i(1 + ri)^{-1}r)(1 + ir) = 1 + ir - i(1 + ri)^{-1}(r + rir) = 1 + ir - i(1 + ri)^{-1}(1 + ri)r = 1 + ir - ir = 1$. Symmetrisch zeigt man $(1 + ir)(1 - i(1 + ri)^{-1}r) = 1$ Also ist $1 + ir$ eine Einheit.
Wenn a eine Einheit ist und $i \in I$, $r \in R$ sind, dann ist $a+ir$ eine Einheit, denn $a(1+a^{-1}ir) = (a + ir)$ ist Produkt zweier Einheiten wegen $a^{-1}i \in I$.
Wenn $\sum_{k=1}^{n} i_k r_k \in IR$ ist, dann ist $1 + \sum i_k r_k$ eine Einheit, denn $1 + \sum i_k r_k = (((1 + i_1 r_1) + i_2 r_2) \ldots + i_n r_n)$ und jeder der Klammerausdrücke ist eine Einheit.
4 $\Longrightarrow$ 5.: Sei M endlich erzeugt und $IM = M$. Sei t minimale Länge eines Erzeugendensystems von $M = Rm_1 + \ldots + Rm_t$. Wegen $IM = M$ läßt sich jedes Element aus M als endliche Summe der Form $\sum i'_j m'_j$ darstellen; die m'_j lassen sich als Linearkombinationen der m_i darstellen. Also gibt es Koeffizienten $i_k r_k \in I$ mit $m_1 = \sum_{k=1}^{t} i_k r_k m_k$. Es folgt $(1 - i_1 r_1)m_1 = \sum_{k=2}^{t} i_k r_k m_k$. Da auch $1 - i_1 r_1$ eine Einheit ist, ist $m_1 = \sum_{k=2}^{t}(1 - i_1 r_1)^{-1} i_k r_k m_k \in Rm_2 + \ldots + Rm_t$ im Widerspruch zur Minimalität von t. Also gilt $M = 0$.
5. $\Longrightarrow$ 6.: $IM + U = M \Longrightarrow I(M/U) = (IM + U)/U = M/U \Longrightarrow M/U = 0 \Longrightarrow M = U$.
6. $\Longrightarrow$ 7.: IM klein in $M \Longrightarrow IM \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.
7. $\Longrightarrow$ 1.: $M = R \Longrightarrow IR \subseteq \mathrm{Rad}({}_RR)$. □

Folgerung 7.25. $\mathrm{Rad}({}_RR) = \mathrm{Rad}(R_R)$.

Beweis: Sei $I = \mathrm{Rad}({}_RR)$. Dann besteht $1 + I$ aus Einheiten. Da I ein Rechtsideal ist, folgt $I \subseteq \mathrm{Rad}(R_R)$. Aus Symmetriegründen ist dann $\mathrm{Rad}({}_RR) = \mathrm{Rad}(R_R)$. □

Lemma 7.26. *R linksartinsch $\Longrightarrow R/\operatorname{Rad}(R)$ halbeinfach.*

Beweis: Nach 5.12 ist $R/\operatorname{Rad}(R)$ artinsch. Nach 7.20 ist $\operatorname{Rad}(R/\operatorname{Rad}(R)) = 0$ und nach 7.23 ist dann $R/\operatorname{Rad}(R)$ halbeinfach. □

Lemma 7.27. *R artinsch $\Longrightarrow \operatorname{Rad}(R)$ nilpotent.*

Beweis: Sei $I := \operatorname{Rad}(R)$. Da R artinsch ist, wird die Kette $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ldots \supseteq I^{t+1} = \ldots$ stationär. Angenommen $I^t \neq 0$. Da auch $I^t I \neq 0$ ist, gibt es einen minimalen Modul $K \subseteq I$ bzgl. $I^t K \neq 0$. Also existiert $x \in K$ mit $I^t x \neq 0$, d.h. es gilt $K = Rx$. Wegen $I^t K = I^{t+1} K = I^t(IK) \neq 0$ und $IK \subseteq K$ folgt $IK = K$. Nach dem Lemma von Nakayama ist $K = 0$, ein Widerspruch. Also ist $I^t = 0$. □

Satz 7.28. (Hopkins) *Sei ${}_RR$ artinsch. Dann ist ${}_RR$ noethersch.*

Beweis: Sei $I := \operatorname{Rad}(R)$ und $I^{n+1} = 0$. Es ist I^i/I^{i+1} ein R/I-Modul und als R-Modul artinsch. Also ist I^i/I^{i+1} auch als R/I-Modul artinsch. R/I ist nach 7.26 halbeinfach, also ist auch I^i/I^{i+1} halbeinfach, d.h. $I^i/I^{i+1} = \oplus_{k\in X} E_k$ mit einfachen R/I-Moduln E_k. Da I^i/I^{i+1} artinsch ist, ist die direkte Summe endlich, also ist auch I^i/I^{i+1} noethersch (als R/I-Modul und als R-Modul). Mit den exakten Folgen $0 \longrightarrow I^{i+1} \longrightarrow I^i \longrightarrow I^i/I^{i+1} \longrightarrow 0$, mit $I^{n+1} = 0, I^0 = R$ und mit 6.3 folgt durch Induktion, daß auch R noethersch ist. □

Folgerung 7.29. *Wenn ${}_RI \subseteq {}_RR$ nilpotent ist, dann ist $I \subseteq \operatorname{Rad}(R)$.*

Beweis: Sei $I^n = 0$ und $i \in I$. Dann ist $(1+i)\cdot(1 - i + i^2 - \ldots \pm i^{n+1}) = 1$, also ist $(1+i)$ eine Einheit. Nach dem Lemma von Nakayama folgt $I \subseteq \operatorname{Rad}(R)$. □

Satz 7.30. *${}_RM$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn*
(1) $\operatorname{Rad}(M) \subseteq M$ *klein ist,*
(2) $M/\operatorname{Rad}(M)$ *endlich erzeugt ist.*

Beweis: $\Longrightarrow$: mit 7.12 trivial.
$\Longleftarrow$: Sei $\{\overline{x}_i = x_i + \operatorname{Rad}(M) | i = 1,\ldots,n\}$ eine Erzeugendenmenge von $M/\operatorname{Rad}(M)$. Dann ist $M = Rx_1 + \ldots + Rx_n + \operatorname{Rad}(M)$, also folgt wegen 1., daß $M = Rx_1 + \ldots + Rx_n$. □

Folgerung 7.31. *M ist genau dann noethersch, wenn für alle Untermoduln $U \subseteq M$ gelten:*
(1) $\operatorname{Rad}(U) \subseteq U$ *ist klein.*
(2) $U/\operatorname{Rad}(U)$ *ist endlich erzeugt*

8. Lokale Ringe

Definition 8.1. Sei R ein Ring. Ein Element $r \in R$ heißt *Nicht-Einheit*, wenn r keine Einheit ist. Das Element r heißt *invertierbar*, wenn r eine Links- oder eine Rechts-Einheit ist.
R heißt ein *lokaler Ring*, wenn die Summe je zweier nicht invertierbarer Elemente eine Nicht-Einheit ist.

Lemma 8.2. *Sei r ein Idempotent ($r^2 = r$) in einem lokalen Ring R. Dann ist $r = 0$ oder $r = 1$.*

Beweis: Es ist $(1-r)^2 = 1 - 2r + r^2 = 1 - r$. Da $1 = (1-r) + r$ eine Einheit ist, ist r oder $1 - r$ invertierbar. Wenn r invertierbar ist, z.B. durch $sr = 1$, dann ist $r = sr^2 = sr = 1$. Wenn $1 - r$ invertierbar ist z.B. durch $s(1-r) = 1$. Dann ist $1 - r = 1$, also $r = 0$. □

Lemma 8.3. *Sei R ein Ring mit den einzigen Idempotenten 0 und 1. Dann ist jedes invertierbare Element in R eine Einheit.*

Beweis: Sei r invertierbar z.B. durch $sr = 1$. Dann ist $(rs)^2 = rsrs = rs$, also $rs \in \{0, 1\}$. Wenn $rs = 0$ ist, dann ist $1 = (sr)^2 = srsr = 0$, ein Widerspruch. Also ist $rs = 1$, d.h. r ist eine Einheit. $\square$

Folgerung 8.4. *In einem lokalen Ring R sind alle Nicht-Einheiten nicht invertierbar.*

Satz 8.5. *Sei R ein lokaler Ring. Dann gelten*

(1) *Alle Nicht-Einheiten sind nicht invertierbar und bilden ein zweiseitiges Ideal N.*
(2) *N ist einziges maximales (einseitiges und zweiseitiges) und größtes Ideal von R.*

Beweis: 1. Sei N die Menge der Nicht-Einheiten von R. Da R lokal ist, also Nicht-Einheiten nicht invertierbar sind, ist N bzgl. der Addition abgeschlossen. Sei $r \in N$ und $s \in R$. Wir zeigen, daß auch $sr \in N$ gilt. Wenn nämlich $sr \notin N$ ist, dann ist sr eine Einheit, also gibt es ein $t \in R$ mit $tsr = 1$. Wegen 8.3 ist damit auch r eine Einheit im Widerspruch zu $r \in N$. Damit ist N ein zweiseitiges Ideal.
2. Offenbar gilt $N \subsetneqq R$. Ist $I \subsetneqq R$ und $r \in I$, so ist $Rr \subsetneqq R$, also r eine Nicht-Einheit und damit $r \in N$. Also gilt $I \subseteq N$. $\square$

Satz 8.6. *R ist genau dann lokal, wenn R genau ein maximales (größtes) Linksideal besitzt.*

Beweis: $\Longrightarrow$: folgt aus 8.5.
$\Longleftarrow$: Sei N das einzige maximale Ideal von R. Dann ist $N = \mathrm{Rad}(R)$ ein zweiseitiges Ideal. Sei $r \in R \setminus N$. Dann ist $N + Rr = R$. Da $N = \mathrm{Rad}(R)$ klein ist in R, gilt $Rx = R$, also existiert ein t mit $tr = 1$. Wenn t eine Rechts-Einheit ist, dann ist nach Lemma 6.13 auch r eine Einheit. Ist t aber keine Rechts-Einheit, dann ist $Rt \neq R$, also $Rt \subseteq N$ und damit $t \in N$. Da N zweiseitiges Ideal ist, ist auch $1 = tr \in N$, ein Widerspruch. Also ist jedes $r \in R \setminus N$ eine Einheit. Jede Nicht-Einheit liegt also in N. Wenn x, y Nicht-Einheiten sind, dann folgt aus $x, y \in N$ auch $x + y \in N$, also ist auch $x + y$ Nicht-Einheit und damit R lokal. $\square$

Lemma 8.7. *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subsetneqq R$. Sei M ein endlich erzeugter Modul. Wenn $M/\mathfrak{m}M = 0$ ist, dann ist $M = 0$.*

Beweis: Wegen $\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(R)$ und $\mathfrak{m}M = M$ folgt $M = 0$ nach dem Lemma von Nakayama. $\square$

9. Lokalisierung

Sei R in diesem Kapitel immer ein kommutativer Ring.

Wiederholung aus Algebra I: Eine Menge S mit $\emptyset \subsetneqq S \subset R$ heißt *multiplikativ abgeschlossen*, wenn gilt

$$\forall s, s' \in S : ss' \in S \qquad \text{und} \qquad 0 \notin S.$$

Auf $R \times S$ ist eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$(r, s) \sim (r', s') :\Longleftrightarrow \exists t \in S : tsr' = ts'r.$$

$R[S^{-1}] = S^{-1}R := R \times S/\sim$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement. Die Elemente werden mit

$$\frac{r}{s} := \overline{(r, s)}$$

bezeichnet. Die Abbildung

$$\varphi : R \ni r \mapsto \frac{sr}{s} \in R[S^{-1}]$$

ist ein Ringhomomorphismus. Sie ist unabhängig von der Wahl von $s \in S$. Ist R nullteilerfrei, dann ist φ injektiv.

Satz 9.1. *Sei $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge. Sei ${}_RM$ ein R-Modul. Dann ist die Relation*

$$(m,s) \sim (m',s') :\Longleftrightarrow \exists t \in S : tsm' = ts'm$$

auf $M \times S$ eine Äquivalenzrelation. Weiter ist

$$S^{-1}M := M \times S/\sim \qquad \text{mit den Elementen} \qquad \frac{m}{s} := \overline{(m,s)}$$

ein $S^{-1}R$-Modul mit den Operationen

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{s}\frac{m'}{s} = \frac{rm}{ss'}.$$

Beweis: wie in Algebra I für $S^{-1}R$. □

Lemma 9.2. *In $S^{-1}M$ gilt $\frac{m}{s} = 0$ genau dann, wenn es ein $t \in S$ gibt mit $tm = 0$.*

Beweis: $(m,s) \sim (0,s') \iff \exists t' \in S : t's'm = 0 \iff \exists t's' \in S : t's'm = 0.$ □

Lemma 9.3. (1) *$\varphi_M : M \ni m \mapsto \frac{sm}{s} \in S^{-1}M$ ist ein von $s \in S$ unabhängiger Gruppenhomomorphismus.*
(2) *φ_M ist genau dann injektiv, wenn S keinen Nullteiler für M enthält, d.h. $sm = 0 \Longrightarrow m = 0$.*
(3) *φ_M ist genau dann bijektiv, wenn die Abbildung $M \ni m \mapsto sm \in M$ für alle $s \in S$ bijektiv ist.*
(4) *φ_R ist ein Ringhomomorphismus.*
(5) *$\varphi_M : M \longrightarrow S^{-1}M$ ist φ_R-semilinear, d.h. $\varphi_M(rm) = \varphi_R(r)\varphi_M(m)$.*

Beweis: 1. Wegen $t'(tsm - stm) = 0$ ist $\frac{sm}{s} = \frac{tm}{t}$.
2. $\varphi_M(m) = 0 \iff \frac{sm}{s} = 0 \iff \exists t \in S : tsm = 0 \iff \exists t \in S : tm = 0$.
3. φ_M surjektiv $\iff \forall \frac{m}{s} \in S^{-1}M\ \exists m' \in M : \frac{sm'}{s} = \frac{m}{s} \iff \forall m \in M, s \in S\ \exists m' \in M : sm' = m \iff \forall s \in S : (s\cdot : M \longrightarrow M)$ surjektiv.
4. + 5. $\varphi_M(rm) = \frac{s^2rm}{s^2} = \frac{sr}{s}\frac{sm}{s} = \varphi_R(r)\varphi_M(m)$. □

Folgerung 9.4. $S^{-1} : R$-**Mod** $\longrightarrow S^{-1}R$-**Mod** *ist ein additiver Funktor.*

Beweis: Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ bilden wir $S^{-1}f \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ durch $S^{-1}f(\frac{m}{s}) := \frac{f(m)}{s}$. Um zu zeigen, daß $S^{-1}f$ eine wohldefinierte Abbildung ist, sei $(m,s) \sim (m',s')$. Dann ist $ts'm = tsm'$ für ein $t \in S$ und damit $ts'f(m) = tsf(m')$. Es folgt $\frac{f(m)}{s} = \frac{f(m')}{s'}$.
Mit den üblichen Regeln des Rechnens mit Brüchen weist man nach, daß $S^{-1}f$ ein $S^{-1}R$-Homomorphismus ist und daß $S^{-1}\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$, $S^{-1}(fg) = S^{-1}(f)S^{-1}(g)$ und $S^{-1}(f+g) = S^{-1}(f) + S^{-1}(g)$ gelten. □

Satz 9.5. *Die Abbildung*

$$\alpha(M) : S^{-1}R \otimes_R M \ni \frac{r}{s} \otimes m \mapsto \frac{rm}{s} \in S^{-1}M$$

definiert einen funktoriellen Isomorphismus

$$\alpha : S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M$$

*von Funktoren $S^{-1}R \otimes_R$ -, S^{-1}- : R-**Mod** $\longrightarrow S^{-1}R$-**Mod**.*

Beweis: $\alpha(M)$ ist eine wohldefinierte Abbildung, denn $\widetilde{\alpha}(M) : S^{-1}R \times M \ni (\frac{r}{s}, m) \mapsto \frac{rm}{s} \in S^{-1}M$ ist wohldefiniert: $(\frac{r}{s}, m) = (\frac{r'}{s'}, m) \Longrightarrow \exists t \in S : ts'r = tsr' \Longrightarrow ts'rm = tsr'm \Longrightarrow \frac{rm}{s} = \frac{r'm}{s'}$. Weiter ist $\widetilde{\alpha}(M)$ offenbar in beiden Argumenten additiv. Schließlich gilt $\widetilde{\alpha}(M)(\frac{r}{s}t, m) = \frac{rtm}{s} = \widetilde{\alpha}(M)(\frac{r}{s}, tm)$, d.h. $\widetilde{\alpha}(M)$ ist R-bilinear.

Wir definieren eine Umkehrabbildung $\beta(M) : S^{-1}M \ni \frac{m}{s} \mapsto \frac{t}{st} \otimes m \in S^{-1}R \otimes_R M$. Auch $\beta(M)$ ist wohldefiniert, denn $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \Longrightarrow \exists t' \in S : t's'm = t'sm' \Longrightarrow \frac{t}{st} \otimes m = \frac{ts't'}{sts't'} \otimes m = \frac{t}{sts't'} \otimes s't'm = \frac{t}{sts't'} \otimes st'm = \frac{tst'}{sts't'} \otimes m' = \frac{t}{s't} \otimes m'$.
Es gilt $\beta\alpha = \mathrm{id}$, denn $\beta(M)\alpha(M)(\frac{r}{s} \otimes m) = \beta(M)(\frac{rm}{s}) = \frac{t}{st} \otimes rm = \frac{rt}{st} \otimes m = \frac{r}{s} \otimes m$.
Ebenso gilt $\alpha\beta = \mathrm{id}$, denn $\alpha(M)\beta(M)(\frac{m}{s}) = \alpha(M)(\frac{t}{st} \otimes m) = \frac{tm}{st} = \frac{m}{s}$.
α ist ein $S^{-1}R$-Homomorphismus, denn $\alpha(M)(\frac{r'}{s'}\frac{r}{s} \otimes m) = \alpha(M)(\frac{r'r}{s's} \otimes m) = \frac{r'rm}{s's} = \frac{r'}{s'}\frac{rm}{s} = \frac{r'}{s'}\alpha(M)(\frac{r}{s} \otimes m)$.
α ist ein funktorieller Homomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}R \otimes_R M \arrow[r, "\alpha(M)"] \arrow[d, "S^{-1}R \otimes_R f"'] & S^{-1}M \arrow[d, "S^{-1}f"] \\
S^{-1}R \otimes_R N \arrow[r, "\alpha(N)"'] & S^{-1}N
\end{tikzcd}$$

kommutiert nämlich, denn es gilt $S^{-1}f \circ \alpha(M)(\frac{r}{s} \otimes m) = S^{-1}f(\frac{rm}{s}) = \frac{f(rm)}{s} = \frac{rf(m)}{s} = \alpha(N)(\frac{r}{s} \otimes f(m)) = \alpha(N) \circ S^{-1}R \otimes_R f(\frac{r}{s} \otimes m)$. $\square$

Definition 9.6. Ein additiver Funktor $T : R$-**Mod** $\longrightarrow S$-**Mod** heißt *exakt*, wenn für jede exakte Folge

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

auch die Folge

$$\ldots \longrightarrow T(M_{i-1}) \xrightarrow{T(f_{i-1})} T(M_i) \xrightarrow{T(f_i)} T(M_{i+1}) \longrightarrow \ldots$$

exakt ist.

Lemma 9.7. *Sei $P \in$ **Mod**-R. Dann erhält der Funktor $P \otimes_R$ - $: R$-**Mod** $\longrightarrow$ **Ab** exakte Folgen der Form*

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0,$$

d.h. die Folgen

$$P \otimes_R M_1 \longrightarrow P \otimes_R M_2 \longrightarrow P \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

sind exakt. (Der Funktor $P \otimes_R$ - ist rechtsexakt.)

Beweis: Sei

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

exakt. Dazu ist äquivalent g surjektiv, $gf = 0$ und $\mathrm{Ke}(g) \subseteq \mathrm{Bi}(f)$. Die Abbildung $P \otimes_R g$ ist surjektiv, denn $\sum p_i \otimes m_{i3} = \sum p_i \otimes g(m_{i2})$ für beliebige $m_{i3} \in M_3$ und geeignete $m_{i2} \in M_2$. Weiter ist $(P \otimes_R g)(P \otimes_R f) = P \otimes_R gf = 0$. Es bleibt zu zeigen $\mathrm{Ke}(P \otimes_R g) \subseteq \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$. Da $\mathrm{Bi}(P \otimes_R f) \subseteq \mathrm{Ke}(P \otimes_R g)$, erhalten wir nach dem Homomorphiesatz einen Homomorphismus

$$\psi : (P \otimes_R M_2)/\,\mathrm{Bi}(P \otimes_R f) \longrightarrow P \otimes_R M_3$$

mit $\psi(\overline{p \otimes m_2}) = p \otimes g(m_2)$. Weiter definierten wir einen Homomorphismus

$$\varphi : P \otimes_R M_3 \longrightarrow (P \otimes_R M_2)/\,\mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$$

mit $\varphi(p \otimes m_3) := \overline{p \otimes m_2}$ für ein $m_2 \in M_2$ mit $g(m_2) = m_3$. Dazu definieren wir zunächst $\widetilde{\varphi} : P \times M_3 \longrightarrow P \otimes_R M_2/\,\mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$ durch $\widetilde{\varphi}(p, m_3) := \overline{p \otimes m_2}$ für ein $m_2 \in M_2$ mit $g(m_2) = m_3$. Wenn auch $g(m_2') = m_3$ gilt, dann ist $g(m_2 - m_2') = 0$, also gibt es ein $m_1 \in M_1$ mit $m_2 - m_2' = f(m_1)$. Es folgt $\overline{p \otimes m_2} = \overline{p \otimes (m_2' + f(m_1))} = \overline{p \otimes m_2'} + \overline{p \otimes f(m_1)} = \overline{p \otimes m_2'}$,

d.h. $\widetilde{\varphi}$ ist wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, daß $\widetilde{\varphi}$ R-bilinear ist und damit φ ein wohldefinierter Homomorphismus ist.
Es gilt jetzt $\varphi\psi = \mathrm{id}$ und $\psi\varphi = \mathrm{id}$ wegen $\varphi\psi(\overline{p \otimes m_2}) = \varphi(p \otimes g(m_2)) = \overline{p \otimes m_2}$ und $\psi\varphi(p \otimes m_3) = \psi(\overline{p \otimes m_2}) = p \otimes g(m_2) = p \otimes m_3$. Also folgt $\mathrm{Ke}(P \otimes_R g) = \mathrm{Ke}(\varphi(P \otimes_R g)) = \mathrm{Ke}(\nu : P \otimes_R M_2 \longrightarrow P \otimes_R M_2/\,\mathrm{Bi}(P \otimes_R f)) = \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$. Damit ist $P \otimes_R M_1 \longrightarrow P \otimes_R M_2 \longrightarrow P \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$ exakt. □

Definition 9.8. Ein Modul P_R heißt *R-flach*, wenn $P \otimes_R$ - ein exakter Funktor ist.

Satz 9.9. *Ein Modul P_R ist genau dann flach, wenn $P \otimes_R$ - Monomorphismen erhält, d.h. wenn für jeden Monomorphismus $f : M \longrightarrow N$ auch $P \otimes_R f : P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N$ ein Monomorphismus ist.*

Beweis: Wenn P_R flach ist und wenn $f : M \longrightarrow N$ ein Monomorphismus ist, dann ist $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ exakt. Folglich ist $0 \longrightarrow P \otimes_R M \xrightarrow{P \otimes_R f} P \otimes_R N$ exakt und damit $P \otimes_R f : P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N$ ein Monomorphismus.
Angenommen $P \otimes_R$ - erhält Monomorphismen und die Folge

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

ist exakt. Dann sind die Folgen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_{i-1}) \longrightarrow M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(f_i) \longrightarrow 0$$

exakt. Da $P \otimes_R$ - Monomorphismen erhält, sind die Folgen

$$0 \longrightarrow P \otimes_R \mathrm{Bi}(f_{i-1}) \longrightarrow P \otimes_R M_i \longrightarrow P \otimes_R \mathrm{Bi}(f_i) \longrightarrow 0$$

exakt. Die kanonische Abbildung $P \otimes_R \mathrm{Bi}(f) \longrightarrow \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$ ist surjektiv, denn jedes Element $\sum p_i \otimes f(m_i) \in \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$ ist im Bild dieser Abbildung. Man beachte jedoch, daß diese Abbildung im allgemeinen nicht injektiv ist. Die Abbildungen $\mathrm{Bi}(f) \longrightarrow N$ und damit auch $P \otimes_R \mathrm{Bi}(f) \longrightarrow P \otimes_R N$ sind jedoch nach Voraussetzung injektiv, also ist $P \otimes_R \mathrm{Bi}(f) \longrightarrow \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$ injektiv und damit bijektiv.
Aus dem Isomorphismus $P \otimes_R \mathrm{Bi}(f) \cong \mathrm{Bi}(P \otimes_R f)$ folgt damit die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathrm{Bi}(P \otimes_R f_{i-1}) \longrightarrow P \otimes_R M_i \longrightarrow \mathrm{Bi}(P \otimes_R f_i) \longrightarrow 0.$$

Also ist auch die Folge

$$\ldots \longrightarrow P \otimes_R M_{i-1} \xrightarrow{P \otimes_R f_{i-1}} P \otimes_R M_i \xrightarrow{P \otimes_R f_i} P \otimes_R M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

exakt □

Satz 9.10. *$S^{-1}R$ ist ein flacher R-Modul.*

Beweis: Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Monomorphismus und sei $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = 0 = \frac{f(m)}{s}$. Dann gibt es ein $t \in S$ mit $tf(m) = 0 = f(tm)$, also mit $tm = 0$. Dann ist aber auch $\frac{m}{s} = 0$, also $S^{-1}f$ ein Monomorphismus. □

Wiederholung aus Algebra I:

(1) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ heißt ein Primideal genau dann, wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und $(rs \in \mathfrak{p} \Longrightarrow r \in \mathfrak{p} \vee s \in \mathfrak{p})$.
(2) Ist $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{m}$ ein Primideal.
(3) $\mathfrak{p} \in R$ ist genau dann ein Primideal, wenn der Restklassenriung $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist.

Lemma 9.11. *Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Äquivalent sind*

(1) $\mathfrak{p}$ *ist ein Primideal.*
(2) $R \setminus \mathfrak{p}$ *ist eine multiplikativ abgeschlossene Menge.*

Beweis: folgt unmittelbar aus der Definition. □

Definition 9.12. Seien $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und M ein R-Modul. Dann heißt $M_{\mathfrak{p}} := S^{-1}M$ mit $S = R \setminus \mathfrak{p}$ die *Lokalisierung* des Moduls M bei $\mathfrak{p}$.
Die Menge $\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subseteq R | \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt *Spektrum* der Ringes R. Die Menge $\mathrm{Specm}(R) := \{\mathfrak{m} \subseteq R | \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal}\}$ heißt *Maximal-Spektrum* der Ringes R.

Satz 9.13. *Sei M ein R-Modul, so daß $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt. Dann ist $M = 0$.*

Beweis: Angenommen, es gibt ein $m \in M$ mit $m \neq 0$. Dann ist $I := \mathrm{Ke}(R \ni r \mapsto rm \in M) \subsetneqq R$ ein Ideal. Weil R endlich erzeugt ist, gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $I \subseteq \mathfrak{m} \subsetneqq R$. Da $M_{\mathfrak{m}} = 0$, ist $\frac{m}{s} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, also gibt es ein $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $tm = 0$. Damit gilt aber $t \in I \subseteq \mathfrak{m}$, ein Widerspruch. □

Folgerung 9.14. *Sei $f : M \longrightarrow N$ gegeben. Äquivalent sind*
(1) *f ist ein Mono- (Epi- bzw. Iso-) Morphismus.*
(2) *Für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist $f_{\mathfrak{m}}$ ein Mono- (Epi- bzw. Iso-) Morphismus.*

Beweis: 1. $\Longrightarrow$ 2.: gilt nach 9.10 und 9.5.
2. $\Longrightarrow$ 1.: Die Folge $0 \longrightarrow \mathrm{Ke}(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathrm{Kok}(f) \longrightarrow 0$ ist exakt. Folglich ist auch

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ke}(f)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Kok}(f)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

exakt. Insbesondere gilt damit $\mathrm{Ke}(f)_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Ke}(f_{\mathfrak{m}})$ und $\mathrm{Kok}(f)_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Kok}(f_{\mathfrak{m}})$. Ist nun $f_{\mathfrak{m}}$ ein Monomorphismus für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, so gilt $\mathrm{Ke}(f)_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $\mathfrak{m}$, also $\mathrm{Ke}(f) = 0$ und damit f Monomorphismus. Analog argumentiert man für Epimorphismen mit $\mathrm{Kok}(f)$. Zusammengenommen geben diese beiden Ergebnisse die Behauptung für Isomorphismen. □

Satz 9.15. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann ist $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring.*

Beweis: Da $0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow 0$ exakt ist und $R/\mathfrak{p} \neq 0$ ist, ist $0 \longrightarrow \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$ exakt und $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Also ist $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subsetneqq R_{\mathfrak{p}}$ ein echtes Ideal. Wenn $\frac{r}{s} \notin \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, dann ist $r \notin \mathfrak{p}$ und $s \notin \mathfrak{p}$, also ist $\frac{s}{r}\frac{r}{s} = 1$ und damit $\frac{r}{s}$ eine Einheit. Daher bilden die Nicht-Einheiten von $R_{\mathfrak{p}}$ ein Ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, d.h. $R_{\mathfrak{p}}$ ist lokal und $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ ist das maximale Ideal. □

Folgerung 9.16. *Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann ist der Quotientenkörper $Q(R/\mathfrak{p})$ isomorph zu $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$.*

Beweis: Wie im vorhergehenden Beweis ist $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Weiter ist $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ ein Körper, weil $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ das maximale Ideal von $R_{\mathfrak{p}}$ ist. Weiter ist

$$(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = S^{-1}(R/\mathfrak{p}) = \{\frac{\overline{r}}{s} | \overline{r} \in R/\mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\} \cong \{\frac{\overline{r}}{\overline{s}} | \overline{r} \in R/\mathfrak{p}, \overline{s} \in R/\mathfrak{p}, \overline{s} \neq 0\} = Q(R/\mathfrak{p}).$$

□

Satz 9.17. *Sei ${}_RM$ ein endlich erzeugter Modul. Sei $M/\mathfrak{m}M = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$. Dann ist $M = 0$.*

Beweis: $M/\mathfrak{m}M \cong R/\mathfrak{m} \otimes_R M \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} R_{\mathfrak{m}} \otimes_R M \cong M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}M_{\mathfrak{m}}$. Da $R_{\mathfrak{m}}$ lokal ist und $M_{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugt ist, folgt $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$. Also ist $M = 0$. □

Folgerung 9.18. *Sei $f : M \longrightarrow N$ ein R-Homomorphismus und sei N endlich erzeugt. Sei $f/\mathfrak{m}f : M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N$ ein Epimorphismus für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$. Dann ist f ein Epimorphismus.*

Beweis: Es ist $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ exakt und damit Q endlich erzeugt. Wir wenden den Funktor $R/\mathfrak{m} \otimes_R$ - an und erhalten die exakte Folge $M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N \longrightarrow Q/\mathfrak{m}Q \longrightarrow 0$ exakt. Da $f/\mathfrak{m}f$ ein Epimorphismus ist, ist $Q/\mathfrak{m}Q = 0$, also $Q = 0$. Damit ist f ein Epimorphismus. $\square$

10. Präsenzübungen zur Algebra II

I. Allgemeine Modultheorie.

(1) Sei R ein Ring. Dann ist ${}_RR$ ein R-Links-Modul.

(2) Sei M eine abelsche Gruppe und $\mathrm{End}(M)$ der Endomorphismenring von M. Dann ist M ein $\mathrm{End}(M)$-Modul.

(3) $\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\}$ ist eine Erzeugendenmenge für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/(2)\times\mathbb{Z}/(3)$.

(4) $\{(\bar{1},\bar{1})\}$ ist eine Erzeugendenmenge für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/(2)\times\mathbb{Z}/(3)$.

(5) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/(n)$ besitzt als Modul keine Basis, d.h. dieser Modul ist nicht frei.

(6) Sei $V=\bigoplus_{i=0}^{\infty}Kb_i$ ein abzählbar unendlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Seien $p,q,a,b\in\mathrm{Hom}(V,V)$ definiert durch

$$\begin{aligned} p(b_i) &:= b_{2i},\\ q(b_i) &:= b_{2i+1},\\ a(b_i) &:= \begin{cases} b_{i/2}, & \text{wenn } i \text{ gerade ist, und}\\ 0, & \text{wenn } i \text{ ungerade ist.}\end{cases}\\ b(b_i) &:= \begin{cases} b_{i-1/2}, & \text{wenn } i \text{ ungerade ist, und}\\ 0, & \text{wenn } i \text{ gerade ist.}\end{cases}\end{aligned}$$

Zeige $pa+qb=\mathrm{id}_V$, $ap=bq=\mathrm{id}$, $aq=bp=0$.
Zeige, daß für $R=\mathrm{End}_K(V)$ gilt ${}_RR=Ra\oplus Rb$ und $R_R=pR\oplus qR$.

(7) Sind $\{(0,\ldots,a,\ldots,0)|a\in K_n\}$ und $\{(a,0,\ldots,0)|a\in K_n\}$ isomorph als $M_n(K)$-Moduln?

(8) Zu jedem Modul P gibt es einen Modul Q mit $P\oplus Q\cong Q$.

(9) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
  (a) $P_1\oplus Q=P_2\oplus Q\Longrightarrow P_1=P_2$?
  (b) $P_1\oplus Q=P_2\oplus Q\Longrightarrow P_1\cong P_2$?
  (c) $P_1\oplus Q\cong P_2\oplus Q\Longrightarrow P_1\cong P_2$?

(10) $\mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(6)\oplus\mathbb{Z}/(6)\oplus\ldots\cong\mathbb{Z}/(6)\oplus\mathbb{Z}/(6)\oplus\mathbb{Z}/(6)\oplus\ldots$.

(11) $\mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(4)\oplus\mathbb{Z}/(4)\oplus\ldots\not\cong\mathbb{Z}/(4)\oplus\mathbb{Z}/(4)\oplus\mathbb{Z}/(4)\oplus\ldots$.

(12) Man finde zwei abelsche Gruppen P und Q, so daß P isomorph zu einer Untergruppe von Q ist und Q isomorph zu einer Untergruppe von P ist und $P\not\cong Q$ gilt.

II. Tensorprodukte

(1) In $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ gilt $1\otimes i-i\otimes 1=0$.
In $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ gilt $1\otimes i-i\otimes 1\neq 0$.

(2) Für jeden R-Modul gilt $R\otimes_R M\cong M$.

(3) Sei der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V=\mathbb{Q}^n$ gegeben.
  (a) Bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}V)$.
  (b) Gib explizit einen Isomorphismus $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}V\cong\mathbb{R}^n$ an.

(4) Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
  (a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(.\mathbb{R}_{\mathbb{Q}},.W)\cong W$ in $\mathbb{Q}$-**Mod**.
  (b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(.V,.W)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(.\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}V,.W)$.
  (c) Sei $\dim_{\mathbb{Q}}V<\infty$ und $\dim_{\mathbb{R}}W<\infty$. Wie kann man verstehen, daß in 4b links unendliche Matrizen und rechts endliche Matrizen stehen?

(d) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(.V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(.\mathbb{R}, .W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(.\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} V, .W)$.

(5) $\mathbb{Z}/(18) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(30) \neq 0$.

(6) $m : \mathbb{Z}/(18) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(30) \ni \overline{x} \otimes \overline{y} \mapsto \overline{xy} \in \mathbb{Z}/(6)$ ist ein Homomorphismus und m ist bijektiv.

(7) Für $\mathbb{Q}$-Vektorräume V und W gilt $V \otimes_{\mathbb{Z}} W \cong V \otimes_{\mathbb{Q}} W$.

(8) Für jede endliche abelsche Gruppe M gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$.

(9) $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \cong \mathbb{Z}/(\mathrm{ggT}(m, n))$.

(10) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$.

(11) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/(n)) = 0$.

(12) Gib explizit Isomorphismen an für

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q},$$
$$3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}.$$

Zeige, daß das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} 3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{Q} \arrow[r, "3\cdot"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

(13) Der Homomorphismus $2\mathbb{Z} \otimes_{Z} \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2)$ ist der Nullhomomorphismus, beide Moduln sind aber von Null verschieden.

III. Projektive Moduln

(1) Bestimme die Dual-Basis von $\mathbb{R}^2$ im Sinne der Vorlesung.

(2) Zeige, daß die Spur eines Homomorphismus $f : V \longrightarrow V$ gegeben ist durch

$$\mathrm{End}_K(V) \cong V \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{ev}} K.$$

(3) Bestimme die Dual-Basis von ${}_{R\times S}R \times 0 \subseteq R \times S$.

(4) K_n ist ein projektiver $M_n(K)$-Modul.

(5) Sei $R := K \times K$ mit einem Körper K.

(a) Zeige: $P := \{(a, 0)|a \in K\}$ ist ein endlich erzeugter projektiver R-Modul.

(b) Sind die R-Moduln P und $Q := \{(0, a)|a \in K\}$ isomorph?

(c) Man finde eine Dual-Basis für P.

(6) Zeige für $R := M_n(K)$, daß $P = K_n$ endlich erzeugt projektiv ist, und finde eine Dual-Basis.

(7) Zu jedem projektiven Modul P gibt es einen freien Modul F mit $P \oplus F \cong F$.

IV. Kategorien und Funktoren

(1) In R-**Mod** gilt:
$f : M \longrightarrow N$ Monomorphismus $\iff$ f injektiver Homomorphismus.

(2) (a) Wenn $f : M \longrightarrow N$ surjektiv ist, dann ist $\mathrm{Hom}_R(f, P) : \mathrm{Hom}_R(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, P)$ injektiv.

(b) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$ induziert eine injektive Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}.M) \cong M.$$

Warum kann man $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), M)$ mit $\{x \in M | nx = 0\} \subseteq M$ identifizieren?

(c) $T_n(M) := \{x \in M | nx = 0\}$ ist ein Funktor $\mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.
(d) Die Einbettung $T_n(M) \longrightarrow M$ ist ein funktorieller Homomorphismus.

(3) In R-**Mod** gilt:
$f : M \longrightarrow N$ Epimorphismus $\iff$ f surjektiv.
(4) Wenn $\mathcal{F}$ ein kovarianter darstellbarer Funktor ist und $f : M \longrightarrow N$ ein Monomorphismus ist, dann ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(N)$ ebenfalls ein Monomorphismus.
(5) Der Funktor $\mathcal{F} : M \mapsto \mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist nicht darstellbar.
(6) Der Funktor $\mathcal{F} : V \mapsto \mathbb{Q}^n \otimes_{\mathbb{Q}} V$ ist darstellbar.
(7) Der Funktor $T_n : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ mit $T_n(M) := \{x \in M | nx = 0\}$ ist darstellbar.
(8) Jeder additive Funktor $F : R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow S\text{-}\mathbf{Mod}$ erhält endliche direkte Summen, d.h. $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$.

V. Morita-Äquivalenz

(1) Zeige, daß $(K \times K)$-**Mod** nicht äquivalent zu K-**Mod** ist.
(2) Sei K ein Körper, $B := M_n(K)$, ${}_KP_B := K^n$ die Menge der Zeilenvektoren, ${}_BQ_K$ die Menge der Spaltenvektoren. Finde $f : P \otimes_B Q \longrightarrow K$ und $g : Q \otimes_K P \longrightarrow B$, so daß (K, B, P, Q, f, g) einen Morita- Kontext bildet. Ist dieser Morita-Kontext strikt?
(3) Zeige $\mathbb{R}$-**Mod** $\not\cong$ $\mathbb{C}$-**Mod**.
(4) Bestimme das Bild der Abbildungen f und g im kanonischen Morita-Kontext (A, B, P, Q, f, g) für
  (a) $A := \mathbb{Z}/(6)$ und $P := \mathbb{Z}/(2)$,
  (b) $A := \mathbb{Z}/(4)$ und $P := \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(2)$,
  (c) $A := \mathbb{Z}/(6)$ und $P := \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(2)$.

VI. Halbeinfache Moduln

(1) Finde alle einfachen Moduln über K, $\mathbb{Z}$, $K[x]$.
(2) Finde alle einfachen Moduln über $\mathbb{C}[x]$, $M_2(K)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$.
(3) Finde alle einfachen Moduln über

$$\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

(4) Stelle $\mathrm{End}_{K[x]}(K[x]/(x) \oplus K[x]/(x-1))$ als Ring von Matrizen dar.

VII. Radikal und Sockel

(1) Radikal und Sockel endlich erzeugter abelscher Gruppen. Bestimme
  (a) $\mathrm{Rad}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/(p))$, $\mathrm{Soc}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/(p))$.
  (b) $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/(p^n))$, $\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/(p^n))$.
  (c) $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/(p^n) \oplus \mathbb{Z}/(p^m))$, $\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/(p^n) \oplus \mathbb{Z}/(p^m))$.
  (d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{Rad}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/(n)) = 0$?
(2) Bestimme Radikal und Sockel der abelschen Gruppen
  (a) $\mathbb{Z}$,
  (b) $\mathbb{Q}$,
  (c) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

VIII. Lokale Ringe

(1) Sei R ein lokaler Ring. Dann ist $R/\mathfrak{m}$ ein Schiefkörper.

(2) Der Ring der formalen Potenzreihen $K[[x]]$ ist ein lokaler Ring.
(3) Der Polynomring $K[x]$ ist kein lokaler Ring.

IX. Lokalisierung

(1) $S := 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist multiplikativ abgeschlossen. $S^{-1}\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$.

(2) (a) Wenn $S \subseteq T$ multiplikativ abgeschlossene Mengen sind, dann wird dadurch ein Homomorphismus $\psi : S^{-1}M \longrightarrow T^{-1}M$ induziert.
(b) Finde eine hinreichende Bedingung dafür, daß ψ injektiv ist.
(c) Für $S := \mathbb{Z} \setminus (p)$ und $T := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beschreibe man den Homomorphismus ψ.
(d) Für $S \subset T$ zeige man $S^{-1}T^{-1}M = T^{-1}S^{-1}M = T^{-1}M$.
(e) Wenn S, T multiplikativ abgeschlossen sind, dann ist auch $S \cap T$ multiplikativ abgeschlossen. Wie drückt sich das für $(S \cap T)^{-1}M$ aus?
(f) Sei $T := (\mathbb{Z} \setminus (2)) \cap (\mathbb{Z} \setminus (3))$. Bestimme $T^{-1}\mathbb{Z}$.
(g) Ist $\mathbb{Z}/(6) \longrightarrow T^{-1}(\mathbb{Z}/(6))$ injektiv? surjektiv?