VORLESUNGEN ÜBER QUANTENGRUPPEN UND NICHTKOMMUTATIVE GEOMETRIE

Prof. Dr. Bodo Pareigis

Sommersemester 1993

Vorwort

Die Vorlesung über Quantengruppen und nichtkommutative Geometrie ist eine Einführung in dieses neue Gebiet mit kategorietheoretischen Hilfsmitteln. Sie wendet sich an Studenten mittlerer Semester und kann (hoffentlich) allein mit Vorkenntnissen aus der Linearen Algebra verstanden werden.

Ich behandle nichtkommutative geometrische Räume im Sinne der algebraischen Geometrie als affine Schemata oder als deren zugehörigen Funktionenalgebren. Von den zugehörigen Quantengruppen konnte ich aus Zeitgründen nur den Monoid-Teil behandeln. Auf der Algebren-Seite entspricht diesen eine Bialgebra.

Viele geometrische Räume können durch die Angabe der auf ihnen definierten Funktionen (in einen vorgegebenen Grundkörper) vollständig beschrieben werde. Diese Funktionen bilden vermöge der Addition und Multiplikation der Werte eine Algebra. Aus der Kenntnis dieser Funktionenalgebra kann der geometrische Raum zurückkonstruiert werden. Das gilt im Falle der algebraischen Geometrie für affine Schemata und zugehörige (Polynom-)Algebren ebenso wie für kompakte topologische Räume und (C^*-)Algebren (Satz von Gelfand-Naimark), alles kommutative Algebren. Anwendungen in der Physik und der Differentialgeometrie lassen es richtig erscheinen, auch nicht-kommutative Algebren zu betrachten, denen im soeben erwähnten Sinne eigentlich keine geometrischen Räume zugeordnet werden können. Wir werden sehen, wieviel von diesem geometrischen Konzept erhalten bleibt. Es reicht, um das Monoid der Endomorphismen eines solchen nichtkommutativen „geometrischen“ Raumes, genannt Quantenmonoid, – selbst ein nichtkommutativer geometrischer Raum – konstruieren zu können.

Für ein affines nichtkommutatives Schema mit endlich-dimensionaler Funktionenalgebra werden wir das universelle Quantenmonoid konstruieren, das auf dem vorgegebenen Schema operiert (nach Tambara).

Weiter wird die Darstellungstheorie von Quantenmonoiden in Form von Komoduln über der zugeordneten Bialgebra studiert. Wir zeigen, daß jedes Diagramm von endlich dimensionalen Vektorräumen, das bezüglich Bildung von Tensorprodukten abgeschlossen ist, aufgefaßt werden kann als Diagramm von Darstellungen eines eindeutig bestimmten universellen Quantenmonoids und daß daraus die Tambarakonstruktion gewonnen werden kann. Weiter wird gezeigt, daß die (endlich dimensionalen) Darstellungen eines Quantenmonoids dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen (Tannaka Dualität).

Für weitere Kapitel, eines, das den Zusammenhang zwischen der Inversenbildung in Quantengruppen, der Antipode, der zugeordneten Hopf-Algebra und der Dualität von Darstellungen darstellt, und eines, das den Zusammenhang zwischen R-Matrizen, der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung und der Quasi-Symmetrie von Darstellungen darstellt, blieb leider keine Zeit. Ich hoffe, daß ich diese Kapitel in einem späteren zweiten Teil der Vorlesung nachholen kann.

München im Juli 1993 B. Pareigis

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Algebren, Koalgebren und Hopf-Algebren

Wir führen in diesem Kapitel die elementaren Begriffe und Eigenschaften des Tensorproduktes von Moduln, insbesondere von Vektorräumen, ein und bauen darauf die Begriffe Algebra, Koalgebra, Bialgebra und Hopf-Algebra auf. In einem späteren Kapitel werden wir dann den Begriff des Tensorprodukts verallgemeinern.

DEFINITION 1.1. Sei R ein beliebiger Ring. Seien M_R, ${}_RN$ Moduln über R. Eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $\otimes : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ heißt *Tensorprodukt*, wenn es zu jeder abelschen Gruppe Z und zu jeder R-bilinearen Abbildung $\varphi : M \times N \longrightarrow Z$ genau einen (Gruppen-)Homomorphismus $f : M \otimes_R N \longrightarrow Z$ so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes_R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert.

LEMMA 1.2. *Tensorprodukte existieren und sind bis auf Isomorphie eindeutig.*

BEWEIS. Man konstruiert wie folgt: $M \otimes_R N := F\{M \times N\}/\mathrm{Rel}$, wobei $F\{X\}$ die freie abelsche Gruppe über X bezeichne und Rel die Untergruppe ist, die von den Elementen

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n);\\&(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2);\\&(m\alpha,n)-(m,\alpha n);\end{aligned}$$

erzeugt wird. Dann definiert man $m \otimes_R n := \otimes_R(m,n) := \overline{(m,n)}$. Man rechnet nach, daß die Abbildung $\otimes_R : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ R-bilinear ist und die gewünschte Eigenschaft hat. Die Kommutativität des Diagramms kann auch geschrieben werden als

$$f(m \otimes_R n) = \varphi(m,n). \tag{1}$$

Wenn auch $\boxtimes : M \times N \longrightarrow M \boxtimes N$ ein Tensorprodukt ist (d.h. die gesuchte universelle Eigenschaft hat), dann gibt es eindeutig bestimmte Homomorphismen $i : M \otimes_R N \longrightarrow M \boxtimes N$ mit $i(m \otimes_R n) = m \boxtimes n$ und $j : M \boxtimes N \longrightarrow M \otimes_R N$ mit $j(m \boxtimes n) = m \otimes_R n$. Insbesondere sind ji bzw. ij die eindeutig bestimmten Homomorphismen mit $ji(m \otimes_R n) = m \otimes_R n$ und $ij(m \boxtimes n) = m \boxtimes n$. Da diese Bedingungen auch durch die identischen Abbildungen erfüllt werden, ist $ij = \mathrm{id}$ und $ji = \mathrm{id}$. $\square$

Bemerkung 1.3. Man beachte, daß $M \otimes_R N$ von den Elementen $m \otimes_R n$ als abelsche Gruppe erzeugt wird, das allgemeine Element also von der Form $\sum m_i \otimes_R n_i$ ist.
Wenn $f : M \longrightarrow M'$ und $g : N \longrightarrow N'$ Homomorphismen von R-Links- bzw. R-Rechts-Modulen sind, dann wird $f \otimes_R g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ definiert durch

$$(f \otimes_R g)(m \otimes_R n) = f(m) \otimes_R g(n). \tag{2}$$

Der Homomorphismus $f \otimes_R g$ ist wegen (1) eindeutig und als Homomorphismus definiert.
Wenn M ein S-R-Bimodul ist ($s(mr) = (sm)r$), dann ist insbesondere $s : M \longrightarrow M$ ein R-Modul Homomorphismus, also $s \otimes_R \mathrm{id} : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ ein Gruppen-Homomorphismus und damit $s(m \otimes_R n) := (sm) \otimes_R n$ wohldefiniert. Damit wird $M \otimes_R N$ zu einem S-Links-Modul. Wenn außerdem N ein R-T-Bimodul ist, dann wird $M \otimes_R N$ ein S-T-Bimodul.
Wir beschränken uns im folgenden auf (Bi-)Moduln über einem Körper $R = \mathbb{K}$, also auf Vektorräume. Das Tensorprodukt über $\mathbb{K}$ schreiben wir als $M \otimes N$.

Lemma 1.4. *a)* $M \otimes N \cong N \otimes M$.
b) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$.
c) $\mathbb{K} \otimes M \cong M \cong M \otimes \mathbb{K}$.
d) $\mathrm{Hom}(P, \mathrm{Hom}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}(P \otimes M, N)$.

Beweis. Wir geben lediglich die verwendeten Homomorphismen an.
a) Man verwende (1), um $\tau(m \otimes n) := n \otimes m$ zu definieren.
b) Man definiere $\mathrm{ass}((m \otimes n) \otimes p) := m \otimes (n \otimes p)$.
c) Man definiere $\lambda : \mathbb{K} \otimes M \longrightarrow M$ durch $\lambda(\alpha \otimes m) := \alpha m$ und $\rho : M \otimes \mathbb{K} \longrightarrow M$ durch $\rho(m \otimes \alpha) := m\alpha$.
d) Für $f : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N)$ definiere man $\varphi(f) : P \otimes M \longrightarrow N$ durch $\varphi(f)(p \otimes m) := f(p)(m)$. $\square$

Übung 1.5. a) Man beweise ausführlich $M \otimes (X \oplus Y) \cong M \otimes X \oplus M \otimes Y$.
b) Zeigen Sie, daß es für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V genau ein Element $\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^* \in V \otimes V^*$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\forall v \in V \quad \sum_i v_i^*(v) v_i = v.$$

(Hinweis: Man verwende einen Isomorphismus $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$ und duale Basen $\{v_i\}$ von V und $\{v_i^*\}$ von V^*.)

Definition 1.6. Eine $\mathbb{K}$-*Algebra* ist ein Vektorraum A zusammen mit einer Multiplikation $\nabla : A \otimes A \longrightarrow A$, die assoziativ ist:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \nabla"] \arrow[d, "\nabla \otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\nabla"'] & A \end{tikzcd}$$

und einem Einselement $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow A$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes A \cong A \cong A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \eta"] \arrow[d, "\eta \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\nabla"'] & A. \end{tikzcd}$$

Seien A und B $\mathbb{K}$-Algebren. Ein *Algebren-Homomorphismus* $f : A \longrightarrow B$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, so daß kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\nabla_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\nabla_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K} \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.7. Offenbar ist die Komposition von zwei Algebren-Homomorphismen wieder ein solcher. Ebenso ist die identische Abbildung ein Algebren-Homomorphismus.

Beispiel 1.8. Beispiele für Algebren sind $\mathrm{End}(V)$ bzw. jeder Ring R mit einem Ring-Homomorphismus $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Cent}(R)$.

Definition 1.9. Eine $\mathbb{K}$-*Koalgebra* ist ein Vektorraum C zusammen mit einer Komultiplikation $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, die koassoziativ ist:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

und einem Koeinselement $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & \mathbb{K} \otimes C \cong C \cong C \otimes \mathbb{K}. \end{tikzcd}$$

Seien C und D $\mathbb{K}$-Koalgebren. Ein *Koalgebren-Homomorphismus* $f : C \longrightarrow D$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, so daß kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.10. Offenbar ist die Komposition von zwei Koalgebren-Homomorphismen wieder ein solcher. Ebenso ist die identische Abbildung ein Koalgebren-Homomorphismus.

Übung 1.11. a) Zeigen Sie, daß $V \otimes V^*$ für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V eine Koalgebra ist, wenn man als Komultiplikation $\Delta(v \otimes v^*) := \sum_{i=1}^n v \otimes v_i^* \otimes v_i \otimes v^*$ definiert, wobei $\{v_i\}$ und $\{v_i^*\}$ duale Basen von V bzw. V^* sind.
b) Zeigen Sie, daß der Vektorraum kX mit einer Basis X und der Komultiplikation $\Delta(x) = x \otimes x$ eine Koalgebra wird.
c) Zeigen Sie, daß $k \oplus V$ mit $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ eine Koalgebra definiert.

Definition 1.12. a) Eine *Bialgebra* $(B, \nabla, \eta, \Delta, \varepsilon)$ besteht aus einer Algebra (B, ∇, η) und aus einer Koalgebra (B, Δ, ε), so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[rr, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, "\nabla"'] & & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes 1"] \\
& & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "\nabla\otimes\nabla"] \\
B \arrow[rr, "\Delta"] & & B \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta\otimes\eta"] & \\
B \arrow[rr, "\Delta"] & & B \otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \mathbb{K} \\
& B \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren, d.h. Δ und ε sind Algebren-Homomorphismen bzw. ∇ und η sind Koalgebren-Homomorphismen.
b) Seien A und B Bialgebren. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt *Bialgebren-Homomorphismus*, wenn sie gleichzeitig Algebren- und Koalgebren-Homomorphismus ist.

c) Eine *Links-Hopf-Algebra* H ist eine Bialgebra H zusammen mit einer *Links-Antipode* $S : H \longrightarrow H$, d.h. einer linearen Abbildung S, so daß das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] & H \\ H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes\mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

Eine *Hopf-Algebra* ist eine Links- und Rechts-Hopf-Algebra.

Übung 1.13. a) Seien C eine Koalgebra und A eine Algebra. Dann definiert die Komposition $f * g := \nabla_A(f \otimes g)\Delta_C$ eine Multiplikation

$$\mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, A) \ni f \otimes g \mapsto f * g \in \mathrm{Hom}(C, A),$$

mit der $\mathrm{Hom}(C, A)$ eine Algebra wird. Das Einselement ist gegeben durch $\mathbb{K} \ni \alpha \mapsto (c \mapsto \eta(\alpha\varepsilon(c))) \in \mathrm{Hom}(C, A)$.
b) Sei H eine Hopf-Algebra. Dann ist S in der Algebra $\mathrm{Hom}(H, H)$ invers zu id. Insbesondere ist S eindeutig bestimmt.
c) Sei H eine Hopf-Algebra. Dann ist S ein Algebren- und ein Koalgebren-Antihomomorpxismus, d.h. S „dreht die Multiplikation und die Komultiplikation um".
d) Seien H und K Hopf-Algebren und sei $f : H \longrightarrow K$ ein Bialgebren-Homomorpxismus. Dann gilt $fS_H = S_K f$, d.h. f ist mit der Antipode vertauschbar.

Beispiel 1.14. a) Sei G eine Gruppe und $\mathbb{K}G$ der (freie) Vektorraum mit der Basis G. Dann ist $\mathbb{K}G$ eine Algebra mit der Multiplikation $\mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \ni g \otimes h \mapsto gh \in \mathbb{K}G$ und dem Einselement $\eta : \mathbb{K} \ni \alpha \mapsto \alpha e \in \mathbb{K}G$ und eine Koalgebra mit der Komultiplikation $\mathbb{K}G \ni g \mapsto g \otimes g \in \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$ und dem Koeinselement $\varepsilon : \mathbb{K}G \ni g \mapsto 1 \in \mathbb{K}$. Mit diesen beiden Strukturen ist $\mathbb{K}G$ sogar eine Hopf-Algebra mit der Antipode $S : \mathbb{K}G \ni g \mapsto g^{-1} \in \mathbb{K}G$, genannt *Gruppen Algebra*. (Beachte: Die Elemente g und h bezeichnen Basiselemente von $\mathbb{K}G$, d.h. sie liegen in der Gruppe G. Es sind Linearkombinationen von solchen Elementen möglich, für die dann die oben definierten Abbildungen komplizierter aussehen.)
Zu jeder Algebra A kann man die *Einheitengruppe* $U(A) := \{a \in A | \exists a^{-1} \in A\}$ mit der Multiplikation als Gruppenverknüpfung konstruieren. Eine Gruppe G zusammen mit der Gruppen Algebra $\mathbb{K}G$ und der Einbettung $\iota : G \longrightarrow \mathbb{K}G$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: $\iota : G \longrightarrow U(\mathbb{K}G)$ ist ein

Gruppen-Homomorphismus, so daß zu jeder Algebra A und jedem Gruppen-Homomorphismus $f : G \longrightarrow U(A)$ genau ein Algebren-Homomorphismus $g : \mathbb{K}G \longrightarrow A$ existiert, durch den das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & U(\mathbb{K}G) \arrow[d, "g"] \\ & U(A). \end{tikzcd}$$

b) Unter einer *Lie Algebra* versteht man einen Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer Multiplikation $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ni x \otimes y \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$, die folgende Gesetze erfüllt:

$$[x, x] = 0,$$
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad \text{(Jacobi Identität).}$$

Wichtiges Beispiel ist die Lie Algebra, die man einer (assoziativen) Algebra (mit Einselement) zuardnet. Wenn A eine Algebra ist, dann ist der Vektorraum A mit der Lie Multiplikation

$$[x, y] := xy - yx \tag{3}$$

eine Lie Algebra, die man mit A^L bezeichnet. Ein Lie Algebren-Homomorphismus $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ ist eine lineare Abbildung f mit $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. Zu jeder Lie Algebra $\mathfrak{g}$ kann man ihre *universelle Hülle* $U(\mathfrak{g})$ konstruieren. Diese besteht aus einer Algebra, ebenfalls mit $U(\mathfrak{g})$ bezeichnet, und einem Lie Algebren-Homomorphismus $\iota : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})^L$, so daß zu jeder Algebra A und jedem Lie-Homomorphismus $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A^L$ genau ein Algebren-Homomorphismus $g : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ existiert, durch den das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & U(\mathfrak{g})^L \arrow[d, "g"] \\ & A^L. \end{tikzcd}$$

Die universelle Hülle einer Lie Algebra existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Sie enthält die gegebene Lie Algebra bis auf Isomorphie als Lie Unteralgebra.

Eine mögliche Konstruktion ist $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$, wobei $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ldots$ die sogenannte Tensoralgebra ist.

$U(\mathfrak{g})$ wird als Algebra von $\mathfrak{g}$ erzeugt. Sie wird zu einer Hopf-Algebra durch die Komultiplikation $\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x$, die Koeinheit $\varepsilon(x) = 0$ und die Antipode $S(x) = -x$.
Man beachte, daß die Konvention der Verwendung von U in beiden Beispielen (units group, universelle Einhüllende) von gänzlich verschiedener Natur ist. Im ersten Fall wird *aus* einer Algebra eine Gruppe gewonnen. Im zweiten Fall wird eine Lie Algebra *zu* einer Algebra ausgebaut. Die universellen Eigenschaften sind jedoch sehr ähnlich.

Übung 1.15. Zeigen Sie, daß für ein Element $x \in \mathbb{K}G$ genau dann $\Delta(x) = x \otimes x$ und $\varepsilon(x) = 1$ gilt, wenn $x = g \in G$ gilt.

KAPITEL II

Kategorien, Funktoren

Dieses Kapitel stellt die notwendigen Hilfmittel der Kategorientheorie bereit. Das wichtigste Ziel ist die Beherrschung des Yoneda-Lemmas und seiner Anwendungen. Dieses wird zentral für die Betrachtungen der weiteren Vorlesung sein. Um den Stoff in überschaubare Einheiten zu gliedern, wird in diesem Kapitel zunächst nur eine allgemeine Einführung in die Begriffe der Kategorientheorie gegeben. Hinzu kommen viele veranschaulichende Beispiele, die zum großen Teil allerdings auch schon zu den uns eigentlich interessierenden Objekten hinführen. Das Yoneda-Lemma selbst und die Anwendungen sind im folgenden Kapitel dargestellt.

Definition 2.1. Eine *Kategorie* besteht aus

(1) eine Klasse $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von *Objekten*,
(2) einer Familie $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ von paarweise disjukten Mengen
$$\{\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) | A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\},$$
deren Elemente $f, g, h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *Morphismen* heißen, und
(3) einer Familie von Abbildungen
$$\{\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \ni (f,g) \\ \mapsto gf \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) | A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\},$$
sogenannten *Verknüpfungen*,

die folgende Axiome erfüllen:

(1) *Assoziativität*: für alle $A, B, C, D \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und alle $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ ist

$$h(gf) = (hg)f,$$

(2) *Identität*: für alle $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ existiert $1_A \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, *Identität* genannt, so daß für alle $B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und alle $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$ gilt

$$f 1_A = f \qquad \text{und} \qquad 1_A g = g.$$

Beispiel 2.2. Sehr viele bekannte Beispiele sind nach demselben Muster aufgebaut, die Klasse der Objekte besteht aus mathematischen Objekten eines genau festgelegten Typs, die Morphismen sind die mit der mathematischen Struktur verträglichen Abbildungen, meistens Homomorphismen genannt, und die Verknüpfungen sind die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

(1) Me bezeichnet die Kategorie der Mengen. Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen und Verknüpfungen sind die Hintereinanderausführung von Abbildungen.
(2) Vek bezeichnet die Kategorie der Vektorräume über einem fest vorgegebenen Körper.
(3) vek bezeichnet die Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume über einem festen Körper.
(4) A-Mod oder ${}_A\mathcal{M}$ bezeichnet die Kategorie der A-Links-Moduln.
(5) Gr bezeichnet die Kategorie der Gruppen.
(6) Ab bezeichnet die Kategorie der abelschen Gruppen.
(7) Mon bezeichnet die Kategorie der Monoide.
(8) Ri bezeichnet die Kategorie der assoziativen Ringe mit Einselement.
(9) Lie Alg bezeichnet die Kategorie der Lie Algebren.
(10) $\mathbb{K}$- Alg bezeichnet die Kategorie der $\mathbb{K}$-Algebren.
(11) $\mathbb{K}$- Koalg bezeichnet die Kategorie der $\mathbb{K}$-Koalgebren.
(12) $\mathbb{K}$- Bialg bezeichnet die Kategorie der $\mathbb{K}$-Bialgebren.
(13) $\mathbb{K}$- Hopf bezeichnet die Kategorie der Hopf-Algebren.
(14) Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, so ist auch $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ mit $\operatorname{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \operatorname{Ob}(\mathcal{C}) \times \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$ und $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A, B), (C, D)) :=$ $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \times \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(B, D)$ und der komponentenweisen Verknüpfung eine Kategorie.

Bemerkung 2.3. Objekte haben jedoch im allgemeinen keine Elemente, und Morphismen sind dann auch keine Abbildungen zwischen den Objekten. Die Identität 1_A ist eindeutig durch das Objekt A bestimmt, denn $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$.

Definition 2.4. Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g : B \longrightarrow A$ gibt mit $gf = 1_A$ und $fg = 1_B$.
Bemerkung: In diesem Falle ist g ebenfalls ein Isomorphismus und durch f eindeutig bestimmt. Wir setzen $f^{-1} := g$.

Beweis. $gf = 1_A$ und $fg' = 1_B$ impliziert $g = g1_B = g(fg') = (gf)g' = 1_A g' = g'$. □

Definition 2.5. Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt *Monomorphismus* oder *links kürzbar*, wenn für alle $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und alle $g, h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$ gilt $fg = fh \Longrightarrow g = h$.
Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt *Epimorphismus* oder *rechts kürzbar*, wenn für alle $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und alle $g, h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ gilt $gf = hf \Longrightarrow g = h$.
Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt ein *Schnitt*, wenn es einen Morphismus $g : B \longrightarrow A$ gibt mit $gf = 1_A$.
Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt eine *Retraktion*, wenn es einen Morphismus $g : B \longrightarrow A$ gibt mit $fg = 1_B$.

Übung 2.6. Man zeige:
f Isomorphismus $\Longrightarrow$ f Schnitt $\Longrightarrow$ f Monomorphismus.
f Isomorphismus $\Longrightarrow$ f Retraktion $\Longrightarrow$ f Epimorphismus.
f Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ f Schnitt und Epimorphismus $\Longleftrightarrow$ f Retraktion und Monomorphismus.
In Gr sind die Monomorphismen genau die injektiven Homomorphismen.

Bemerkung 2.7. In den Kategorien Me, Vek, vek, A-Mod, Gr, Ab, Mon, $\mathbb{K}$- Alg sind die Monomorphismen genau die injektiven Homomorphismen.
In den Kategorien Me, Vek, vek, A-Mod, Gr, Ab sind die Epimorphismen genau die surjektiven Homomorphismen.
In der Kategorie Ri ist $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus.

Definition 2.8. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathcal{F} : \operatorname{Ob} \mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ und einer Familie von Abbildungen $(\mathcal{F} = \mathcal{F}(A,B) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B)) | A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C})$, so daß gelten

$$\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}; \tag{4}$$

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \tag{5}$$

für alle $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Ein *kontra-varianter Funktor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathcal{F} : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ und einer Familie von Abbildungen

$$(\mathcal{F} = \mathcal{F}(A,B) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(A)) | A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}),$$

so daß gelten

$$\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}; \tag{6}$$

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) \tag{7}$$

für alle $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Bemerkung 2.9. Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ lassen sich verknüpfen, wenn man definiert $(\mathcal{G}\mathcal{F})(A) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(A))$ und $(\mathcal{G}\mathcal{F})(f) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$. Diese Verknüpfung ist assoziativ mit Identität $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Übung 2.10. Zeigen Sie:
a) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so ist auch $\mathcal{C}^{op}$ mit $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$ und der Verknüpfung $f * g := gf$ eine Kategorie. Dabei sei $f * g$ die Verknüpfung in $\mathcal{C}^{op}$ und gf die Verknüpfung in $\mathcal{C}$. Die Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ heißt *duale Kategorie* zu $\mathcal{C}$.
b) Es gibt eine Bijektion zwischen den kontravarianten Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, den kovarianten Funktoren $\mathcal{F}' : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ und den kovarianten Funktoren $\mathcal{F}'' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$.

Beispiel 2.11.
(1) Die *Vergißfunktoren*, die jeweils einen Teil der Struktur „vergessen“: $\mathcal{V} : \mathrm{Gr} \longrightarrow \mathrm{Me}$, $\mathcal{V} : \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Gr}$, $\mathcal{V} : \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathrm{Ab}$, $\mathcal{V} = \text{-}^L : \mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{Lie\ Alg}$.
(2) Der Gruppenalgebra Funktor $\mathbb{K}\text{-} : \mathrm{Gr} \longrightarrow \mathbb{K}\text{- Alg}$.
(3) Die universelle Hülle einer Lie Algebra $U(\text{-}) : \mathrm{Lie\ Alg} \longrightarrow \mathbb{K}\text{- Alg}$.
(4) Die Kommutatorfaktorgruppe $\text{-}/[\text{-},\text{-}] : \mathrm{Gr} \longrightarrow \mathrm{Ab}$.
(5) Freie Moduln bzw. Vektorräume: $\mathbb{K}\text{-} : \mathrm{Me} \longrightarrow \mathrm{Vek}$.
(6) Freie Algebren, auch nicht-kommutative Polynomringe genannt: $\mathbb{K}\langle\text{-}\rangle : \mathrm{Me} \longrightarrow \mathbb{K}\text{- Alg}$.

(7) Tensoralgebren: $T(\text{-}) : \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Alg}$ mit $T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \ldots$. Es ist $\mathbb{K}\langle X\rangle = T(\mathbb{K}X)$.
(8) Freie kommutative Algebren oder Polynomringe: $\mathbb{K}[\text{-}] : \mathrm{Me} \longrightarrow \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Alg}$.
(9) Symmetrische Algebren: $S(\text{-}) : \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Alg}_c$ mit $S(V) = T(V)/(xy - yx)$. Es ist $\mathbb{K}[X] = S(\mathbb{K}X)$.
(10) Das Tensorprodukt $\otimes : \mathrm{Vek} \times \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathrm{Vek}$.

Satz 2.12. (1) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ *für $A \in \mathcal{C}$ mit*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-})(B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-})(f) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, f),$$

wobei $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g \mapsto fg \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ *für $f : B \longrightarrow C$, ein kovarianter Funktor.*

(2) *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, A) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ *für $A \in \mathcal{C}$ mit*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, A)(B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, A)(f) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, A),$$

wobei $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, A) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \ni g \mapsto gf \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ *für $f : B \longrightarrow C$, ein kontravarianter Funktor.*

Beweis. (1) Wir rechnen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})(f'f)(g) = (f'f)g = f'(fg) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})(f')(fg) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})(f')\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})(f)(g)$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})(1_A)(g) = 1_A g = g = 1_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)}(g)$.
(2) wird durch analoge Rechnung bewiesen. □

Bemerkung 2.13. (1) Funktoren von der im Satz angegebenen Form werden *darstellbare Funktoren* genannt, und A wird das *darstellende Objekt* genannt. Eine allgemeinere Definition für darstellbare Funktoren findet sich in 2.20.
(2) Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt eine *Isomorphie*, wenn es einen Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ gibt mit $\mathcal{GF} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{FG} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Wenn es eine Isomorphie zwischen zwei Kategorien gibt, dann heißen sie *isomorph*.

Folgerung 2.14. *Der Funktor* dualer Vektorraum $\text{-}^* : Vek \longrightarrow \mathrm{Vek}$ *definiert durch*

$$\text{-}^*(V) := V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}),$$
$$\text{-}^*(f) := f^* = \mathrm{Hom}(f, \mathbb{K})$$

ist ein kontravarianter Funktor.

Beweis. Man kann die Eigenschaften aus dem vorhergehenden Satz entnehmen, muß aber zusätzlich zeigen, daß alle Mengen V^* Vektorräume sind und alle Abbildungen f^* Vektorraum Homomorphismen sind. Das ist aus der linearen Algebra bekannt. □

Lemma 2.15. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter (kontravarianter) Funktor. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Isomorphismus. Dann ist auch $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ (bzw. $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$) ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $g = f^{-1} : B \longrightarrow A$. Wegen $gf = 1_A$ und $fg = 1_B$ ist $\mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ und analog $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = 1_{\mathcal{F}(B)}$. □

Definition 2.16. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation* oder ein *funktorieller Morphismus* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ besteht aus einer Familie von Morphismen $(\varphi(A) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A) | A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C})$, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\varphi(B)"'] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd} \qquad \text{(bzw.} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\varphi(B)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\varphi(A)"'] & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd} \quad)$$

kommutieren.

Bemerkung 2.17. Natürliche Transformationen $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ und $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ lassen sich verknüpfen, wenn man definiert

$$\psi\varphi(A) := \psi(A)\varphi(A) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A) \longrightarrow \mathcal{H}(A).$$

Diese Verknüpfung ist assoziativ und der identische Morphismus $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(A) := 1_{\mathcal{F}(A)} : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$ ist eine natürliche Transformation und wirkt als Identität bzgl. der Verknüpfung von natürlichen Transformationen.

Beispiel 2.18. Die Familie von Vektorraum Homomorphismen

$$(\iota(V) : V \longrightarrow V^{**} | V \in \operatorname{Ob}(\mathrm{Vek}))$$

definiert eine natürliche Transformation $\iota : \mathrm{Id}_{\mathrm{Vek}} \longrightarrow \text{-}^{**}$ vom Identitäts-Funktor in den Funktor Bidualraum. Dabei sei $\iota(V) : V \longrightarrow V^{**} = \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(V, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ durch $\iota(V)(v)(f) := f(v)$ definiert. Man rechnet leicht nach, daß $\iota(V)$ wohldefiniert ist (die Werte liegen in $\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(V, \mathbb{K}), \mathbb{K})$) und ein Homomorphismus ist. Wir zeigen die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota(V)"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\iota(W)"'] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

$f^{**}\iota(V)(v)(g) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(f,\mathbb{K}),\mathbb{K})\iota(V)(v)(g) = \iota(V)(v)\,\mathrm{Hom}(f,\mathbb{K})(g) = \iota(V)(v)(gf) = gh(v) = \iota(W)(f(v))(g)$.

Definition 2.19. Seien $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ heißt *natürlicher* oder *funktorieller Isomorphismus*, wenn es eine natürliche Transformation $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ gibt mit $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ und $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$.
Die Menge der funktoriellen Morphismen oder natürlichen Transformationen von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Nat}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. (Bemerkung: Mengentheoretisch muß man hier von einer (Super-)Klasse sprechen, da schon jede einzelne natürliche Transformation aus einer Klasse besteht. Wir werden diese Unterschiede hier nicht behandeln.)
Zwei Funktoren $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißen *isomorph* $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ gibt.
Zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen *äquivalent*, wenn es Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ so gibt, daß $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ und $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gelten. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißen dann zueinander inverse *Äquivalenzen*.

Definition 2.20. Ein kovarianter (kontravarianter) Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ heißt *darstellbarer Funktor*, wenn es ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und einen natürlichen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-)$ (bzw. $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},A)$) gibt. A heißt dann ein *darstellendes Objekt* für $\mathcal{F}$.
Sei $\mathcal{V} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ein Vergißfunktor. Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt *darstellbarer Funktor*, wenn $\mathcal{V}\mathcal{F}$ darstellbar ist. (Genauer müßte man hier annehmen, daß die Morphismenmengen in $\mathcal{C}$ Objekte in $\mathcal{D}$ sind, und daß $\mathcal{F} \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})$ gilt. Das benötigt zur genauen Behandlung das Konzept einer *angereicherten Kategorie* über einer *abgeschlossenen monoidalen Kartegorie*.)

Übung 2.21. a) Eine natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn $\varphi(A)$ für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.
b) Der freie Vektorraum $\mathbb{K}X$ über der Menge X stellt den Funktor

$$\mathrm{Abb}(X,\text{-}) : \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathrm{Me}$$

dar. Dazu müssen wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Abb}(X, \text{-}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}X, \text{-})$$

angeben. Für einen Vektorraum V und eine Abbildung $f : X \longrightarrow V$ sei $g = \varphi(V)(f) : \mathbb{K}X \longrightarrow V$ definiert als Fortsetzung der Abbildung f von der Basis X auf den gesamten Vektorraum $\mathbb{K}X$, also durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{K}X \arrow[d, "g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, daß dadurch ein natürlicher Isomorphismus definiert ist.

Beispiel 2.22. (1) Das Tensorprodukt $U \otimes V$ stellt den Funktor

$$\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, \text{-})) : \mathrm{Vek} \times \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathrm{Vek}$$

dar. Wir müssen Isomorphismen $\varphi(W) : \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ angeben, die einen natürlichen Isomorphismus definieren (vgl. 1.4 d)). Wir definieren daher $\varphi(W)(f)(u \otimes v) := f(u)(v)$ für $f \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$. Da der Ausdruck $f(u)(v)$ in den beiden Variablen u und v bilinear ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi(W)(f)$, der die Gleichung erfüllt. Ist umgekehrt $g : U \otimes V \longrightarrow W$ gegeben, so definieren wir $\varphi(W)^{-1}(g) : \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \ni g \mapsto (u \mapsto (v \mapsto g(u, v))) \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$. Man rechnet nach, daß alle Abbildungen linear sind und daß φ ein natürlicher Isomorphismus ist. Tatsächlich kann man zeigen, daß die Isomorphismen $\varphi(W) : \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ natürlich in U, V, W sind.
(2) Sei $\mathrm{Bil} : \mathrm{Vek} \times \mathrm{Vek} \times \mathrm{Vek} \longrightarrow \mathrm{Vek}$ definiert durch $\mathrm{Bil}(U, V; W) := \{f : U \times V \longrightarrow W | f \text{ bilineare Abbildung }\}$. Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus:

$$\Phi : \mathrm{Bil}(U, V; W) \ni f \mapsto (u \mapsto f(u, \text{-})) \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$

Dieser Isomorphismus ist in allen Variablen U, V, W natürlich. Insbesondere ist nach Teil (1) $\mathrm{Bil}(U, V; W)$ als Funktor in W darstellbar durch $U \otimes V$.

KAPITEL III

Adjungierte Funktoren und das Yoneda Lemma

Das Yoneda-Lemma ist ein zentrales Hilfmittel für genauere Aussagen über darstellbare Funktoren. Wir zeigen mit einigen Beispielen, daß solche darstellbaren Funktoren sehr häufig auftreten.

LEMMA 3.1. *Der Funktor* $G_a : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *mit* $G_a(A) := A^+$*, die additive Gruppe der Algebra* A*, ist darstellbar durch die Algebra* $\mathbb{K}[x]$*, den Polynomring in einer Variablen* x*.*

BEWEIS. G_a ist ein Vergißfunktor, der die multiplikative Struktur von Algebren vergißt und lediglich die additive Gruppe der Algebra ergibt. Wir müssen in A natürliche Isomorphismen $G_a(A) \cong \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], A)$ angeben. Jedem Element $a \in A^+$ ordenen wir zu den Homomorphismus $a_* : \mathbb{K}[x] \ni p(x) \mapsto p(a) \in A$. Das ist ein Algebren Homomorphismus, weil $a_*(p(x) + q(x)) = p(a) + q(a) = a_*(p(x)) + a_*(q(x))$ und $a_*(p(x)q(x)) = p(a)q(a) = a_*(p(x))a_*(q(x))$ oder weil $\mathbb{K}[x]$ freie (kommutative) $\mathbb{K}$-Algebra über $\{x\}$ ist, d.h. weil sich jede Abbildung $\{x\} \longrightarrow A$ eindeutig zu einem Algebren Homomorphismus $\mathbb{K}[x] \longrightarrow A$ fortsetzen läßt. Die Abbildung $A \ni a \mapsto a_* \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], A)$ ist umkehrbar mit der Umkehrung $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], A) \ni f \mapsto f(x) \in A$. Schließlich ist sie natürlich in A, weil

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "_{*}"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], A) \arrow[d, "\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], g)"] \\
B \arrow[r, "_{*}"'] & \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], B)
\end{tikzcd}$$

für alle $g \in \mathbb{K}\text{- Alg}(A, B)$ kommutiert. □

BEMERKUNG 3.2. Da A^+ die Struktur einer additiven Gruppe trägt, ist das auch für $\mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x], A)$ der Fall.

LEMMA 3.3. *Der Funktor $G_m = U : \mathbb{K}\text{- Alg} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ mit $U(A)$, die multiplikative Gruppe der Einheiten der Algebra A, ist darstellbar durch die Algebra $\mathbb{K}[x, x^{-1}] = \mathbb{K}[x, y]/(xy - 1)$, den Ring der Laurent-Polynome in einer Variablen x.*

BEWEIS. Wir müssen in A natürliche Isomorphismen

$$G_m(A) \cong \mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x, x^{-1}], A)$$

angeben. Jedem Element $a \in G_m(A)$ ordenen wir den Algebren Homomorphismus $a_* := \mathbb{K}[x, x^{-1}] \ni x \mapsto a \in A$ zu. Damit ist ein eindeutig bestimmter Algebren Homomorphismus definiert, denn jeder Algebren Homomorphismus f von $\mathbb{K}[x, x^{-1}] = \mathbb{K}[x, y]/(xy-1)$ in A ist vollständig durch die Bilder von x und von y bestimmt, aber für die Bilder muß zusätzlich gelten $f(x)f(y) = 1$, d.h. $f(x)$ muß invertierbar sein und $f(y)$ das Inverse zu $f(x)$. Die Zuordnung ist bijektiv. Außerdem ist sie natürlich in A, weil

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{-_*} & \mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x, x^{-1}], A) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x, x^{-1}], g)} \\ B & \xrightarrow[-_*]{} & \mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x, x^{-1}], B) \end{array}$$

für alle $g \in \mathbb{K}\text{- Alg}(A, B)$ kommutiert. □

BEMERKUNG 3.4. Da $U(A)$ die Struktur einer multiplikativen Gruppe trägt, ist das auch für $\mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x, x^{-1}], A)$ der Fall.

LEMMA 3.5. *Der Funktor $M_n : \mathbb{K}\text{- Alg} \longrightarrow \mathbb{K}\text{- Alg}$ mit $M_n(A)$, die Algebra der $n \times n$-Matrizen über der Algebra A, ist darstellbar durch die Algebra $\mathbb{K}\langle x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}\rangle$, den nicht-kommutativen Polynomring in den Variablen x_{ij}.*

BEWEIS. Der Polynomring $k\langle x_{ij}\rangle$ ist frei über der Menge $\{x_{ij}\}$ in der Kategorie der (nicht-kommutativen) Algebren, d.h. zu jeder Algebra A und zu jeder Abbildung $f : \{x_{ij}\} \longrightarrow A$ gibt es genau einen Algebren Homomorphismus
$g : \mathbb{K}\langle x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}\rangle \longrightarrow A$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \{x_{ij}\} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{K}\langle x_{ij}\rangle \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Jede Matrix aus $M_n(A)$ definiert dann genau einen Algebren Homomorphismus $\mathbb{K}\langle x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}\rangle \longrightarrow A$ und umgekehrt. □

Satz 3.6. *(Yoneda Lemma) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ und ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ gegeben. Dann ist die Abbildung*

$$\tau : \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-}), \mathcal{F}) \ni \varphi \mapsto \varphi(A)(1_A) \in \mathcal{F}(A)$$

bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\tau^{-1} : \mathcal{F}(A) \ni a \mapsto h^a \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-}), \mathcal{F}),$$

wobei $h^a(B)(f) = \mathcal{F}(f)(a)$ ist.

Beweis. Da $\varphi(A) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$ definiert ist, ist τ eine wohldefinierte Abbildung. Für τ^{-1} ist nachzuprüfen, daß h^a eine natürliche Transformation ist. Sei dazu $f : B \longrightarrow C$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[r, "\mathrm{Mor}(A,f)"] \arrow[d, "h^a(B)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \arrow[d, "h^a(C)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}(C) \end{tikzcd}$$

kommutativ, denn für $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist $h^a(C)\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, f)(g) = h^a(C)(fg)$ $= \mathcal{F}(fg)(a) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)(a) = \mathcal{F}(f)h^a(B)(a)$. Damit ist τ^{-1} wohldefiniert. Sei $\tau^{-1}(a) = h^a$. Dann ist $\tau\tau^{-1}(a) = h^a(A)(1_A) = \mathcal{F}(1_A)(a) = a$. Sei $\tau(\varphi) = \varphi(A)(1_A) = a$. Dann ist $\tau^{-1}\tau(\varphi) = h^a$ und $h^a(B)(f) = \mathcal{F}(f)(a) = \mathcal{F}(f)(\varphi(A)(1_A)) = \varphi(B)\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, f)(1_A) = \varphi(B)(f)$, also $h^a = \varphi$. □

Bemerkung 3.7. Die Abbildung τ ist eine natürliche Transformation in den Argumenten A und $\mathcal{F}$. Genauer: Wenn $f : A \longrightarrow B$ und $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ gegeben sind, dann kommutieren

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-}), \mathcal{F}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}(A,\text{-}),\varphi)"'] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\varphi(A)"] \\ \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{-}), \mathcal{G}) \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-}),\mathcal{F}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}(f,\text{-}),\mathcal{F})"'] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,\text{-}),\mathcal{F}) \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{F}(B).
\end{tikzcd}$$

Das beweist man durch einfaches Nachrechnen. Für $\psi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-}) \longrightarrow \mathcal{F}$ gelten

$$\tau\,\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-}),\varphi)(\psi) = \tau(\varphi\psi) = (\varphi\psi)(A)(1_A) = \varphi(A)\psi(A)(1_A)$$
$$= \varphi(A)\tau(\psi)$$

und

$$\tau\,\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-}),\mathcal{F})(\psi) = \tau(\psi\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-}) = (\psi\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-})(B)(1_B)$$
$$= \psi(B)(f) = \psi(B)\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,f)(1_A) = \mathcal{F}(f)\psi(A)(1_A) = \mathcal{F}(f)\tau(\psi).$$

Folgerung 3.8. *Seien $A, B \in \mathcal{C}$. Dann gelten*
1) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-}) \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,\text{-}),\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-}))$ *ist eine bijektive Abbildung.*
2) Bei der bijektiven Abbildung aus 1) entsprechen den Isomorphismen aus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *genau die natürlichen Isomorphismen in*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,\text{-}),\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})).$$

3) Für kontravariante Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ *ist* $\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},A),\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(A)$.
4) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},f) \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},A),\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},B))$ *ist eine bijektive Abbildung, bei der die Isomorphismen aus* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *genau den natürlichen Isomorphismen aus* $\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},A),\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},B))$ *entsprechen.*

Beweis. 1) folgt aus dem Yoneda Lemma mit $\mathcal{F} = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})$.
2) Da $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-})\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g,\text{-}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(gf,\text{-})$ gilt und da $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,\text{-}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})}$ genau dann, wenn $f = 1_A$, ergibt sich nach 1) die Zuordnung der Isomorphismen zueinander.
3) und 4) folgen durch Dualisieren. □

Bemerkung 3.9. Nach der vorhergehenden Folgerung ist das darstellende Objekt A durch die Isomorphieklasse des Funktors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,\text{-})$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Insbesondere sind die Algebren aus den Lemmas 3.1, 3.3 und 3.5 bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

Übung 3.10. a) Geben Sie explizit alle natürlichen Endomorphismen von G_a in G_a an.
b) Geben Sie alle natürlichen Transformationen von G_a in G_m an.
c) Bestimmen Sie die natürlichen Automorphismen von G_m.

Satz 3.11. *Sei $\mathcal{G} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow$ Me ein kovarianter Bifunktor, so daß für alle $C \in \mathcal{C}$ der Funktor $\mathcal{G}(C, \text{-}) : \mathcal{D} \longrightarrow$ Me darstellbar ist. Dann existiert ein kontravarianter $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so daß $\mathcal{G} \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-})$ gilt. Weiterhin ist $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{G}$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.*

Beweis. Zu jedem $C \in \mathcal{C}$ wählen wir ein Objekt $\mathcal{F}(C) \in \mathcal{D}$ und einen Isomorphismus $\xi_C : \mathcal{G}(C, \text{-}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), \text{-})$. Wenn $f : C \longrightarrow C'$ in $\mathcal{C}$ gegeben ist, dann sei $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(C') \longrightarrow \mathcal{F}(C)$ der nach dem Yoneda Lemma eindeutig bestimmte Morphismus in $\mathcal{D}$, mit dem das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(C,\text{-}) \arrow[r, "\xi_C"] \arrow[d, "\mathcal{G}(f,\text{-})"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C),\text{-}) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\mathcal{F}(f),\text{-})"] \\
\mathcal{G}(C',\text{-}) \arrow[r, "\xi_{C'}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C'),\text{-})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen der Eindeutigkeit von $\mathcal{F}(f)$ und der Funktoreigenschaft von $\mathcal{G}$ sieht man sofort, daß $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}(1_C) = 1_{\mathcal{F}(C)}$ gelten, daß $\mathcal{F}$ also ein kontravarianter Funktor ist.
Ist $\mathcal{F}' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit $\mathcal{G} \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'\text{-},\text{-})$ gegeben, so ist $\varphi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-},\text{-}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'\text{-},\text{-})$. Also gibt es nach dem Yoneda Lemma Isomorphismen $\psi(C) : \mathcal{F}(C) \cong \mathcal{F}'(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$. Mit diesen durch φ induzierten Isomorphismen kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'(C),\text{-}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}(\psi(C),\text{-})"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\mathcal{F}'(f),\text{-})"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C),\text{-}) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\mathcal{F}(f),\text{-})"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'(C'),\text{-}) \arrow[r, "\mathrm{Mor}(\psi(C'),\text{-})"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C'),\text{-}).
\end{tikzcd}$$

Also kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C') \arrow[r, "\psi(C')"] \arrow[d, "\mathcal{F}'(f)"'] & \mathcal{F}'(C') \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\
\mathcal{F}(C) \arrow[r, "\psi(C)"'] & \mathcal{F}'(C)
\end{tikzcd}$$

womit $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ ein natürlicher Isomorphismus ist. □

DEFINITION 3.12. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ kovariante Funktoren. $\mathcal{F}$ heißt *linksadjungiert* zu $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}$ *rechtsadjungiert* zu $\mathcal{F}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus von Bifunktoren $\varphi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-})$ von $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ in Me gibt.

LEMMA 3.13. *Ist $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, so ist $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{G}$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Ebenso ist $\mathcal{G}$ durch $\mathcal{F}$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.*

BEWEIS. Wir beweisen nur die erste Aussage. Sei auch $\mathcal{F}'$ linksadjungiert zu $\mathcal{G}$ mit $\varphi' : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'\text{-}, \text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-})$. Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus ${\varphi'}^{-1}\varphi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}'\text{-}, \text{-})$. Nach Satz 3.11 ist daher $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$. $\square$

LEMMA 3.14. *Ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ besitzt genau dann einen linksadjungierten Funktor, wenn alle Funktoren $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}\text{-})$ darstellbar sind.*

BEWEIS. Folgt aus 3.11. $\square$

LEMMA 3.15. *Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ kovariante Funktoren. Dann ist*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{G}\mathcal{F}) \ni \Phi \mapsto \mathcal{G}\text{-}\Phi\text{-} \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-}))$$

eine bijektive Abbildung mit der inversen Abbildung

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-})) \ni \varphi \mapsto \varphi(\text{-}, \mathcal{F}\text{-})(1_{\mathcal{F}\text{-}}) \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{G}\mathcal{F}).$$

Weiter ist

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{F}\mathcal{G}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \ni \Psi \mapsto \Psi\text{-}\mathcal{F}\text{-} \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-}))$$

eine bijektive Abbildung mit der inversen Abbildung

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\text{-}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-}, \text{-})) \ni \psi \mapsto \psi(\mathcal{G}\text{-}, \text{-})(1_{\mathcal{G}\text{-}}) \in \mathrm{Nat}(\mathcal{F}\mathcal{G}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}).$$

BEWEIS. Die natürliche Transformation $\mathcal{G}\text{-}\Phi\text{-}$ ist wie folgt definiert. Seien $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), D)$ gegeben, so sei $(\mathcal{G}\text{-}\Phi\text{-})(C, D)(f) := \mathcal{G}(f)\Phi(C) : C \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}(C) \longrightarrow \mathcal{G}(D)$. Man rechnet die Eigenschaft einer natürlichen Transformation leicht nach. Ist Φ gegeben, so erhält man nach der Hintereinanderausführung beider Abbildungen $\mathcal{G}(1_{\mathcal{F}(C)})\Phi(C) = \mathcal{G}\mathcal{F}(1_C)\Phi(C) = \Phi(C)$. Ist φ gegeben, so erhält man

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}(f)(\varphi(C, \mathcal{F}(C))(1_{\mathcal{F}(C)}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(f))\varphi(C, \mathcal{F}(C))(1_{\mathcal{F}(C)})\\ &= \varphi(C, D)\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), f)(1_{\mathcal{F}(C)}) = \varphi(C, D)(f).\end{aligned}$$

Den zweiten Teil des Lemmas zeigt man analog. $\square$

SATZ 3.16. *Seien*

$$\varphi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-},\text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},\mathcal{G}\text{-}) \quad \textit{und} \quad \psi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},\mathcal{G}\text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-},\text{-})$$

natürliche Transformationen mit (nach Lemma 3.15) zugeordneten natürlichen Transformationen $\Phi : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{GF}$ *bzw.* $\Psi : \mathcal{FG} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

1) Es gilt $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}(\text{-},\mathcal{G}\text{-})}$ *dann und nur dann, wenn* $(\mathcal{G} \xrightarrow{\Phi\mathcal{G}} \mathcal{GFG} \xrightarrow{\mathcal{G}\Psi} \mathcal{G}) = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ *gilt.*

2) Es gilt $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}(\mathcal{F}\text{-},\text{-})}$ *dann und nur dann, wenn* $(\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}\Phi} \mathcal{FGF} \xrightarrow{\Psi\mathcal{F}} \mathcal{F}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ *gilt.*

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}\Psi(D)\Phi\mathcal{G}(D) = \mathcal{G}\Psi(D)\varphi(\mathcal{G}(D),\mathcal{FG}(D))(1_{\mathcal{FG}(D)})\\
&= \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}(D),\mathcal{G}\Psi(D))\varphi(\mathcal{G}(D),\mathcal{FG}(D))(1_{\mathcal{FG}(D)})\\
&= \varphi(\mathcal{G}(D),D)\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{FG}(D),\Psi(D))(1_{\mathcal{FG}(D)})\\
&= \varphi(\mathcal{G}(D),D)(\Psi(D))\\
&= \varphi(\mathcal{G}(D),D)\psi(\mathcal{G}(D),D)(1_{\mathcal{G}(D)})\\
&= \varphi\psi(\mathcal{G}(D),D)(1_{\mathcal{G}(D)}).
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned}
&\varphi\psi(C,D)(f) = \varphi(C,D)\psi(C,D)(f) = \mathcal{G}(\Psi(D)\mathcal{F}(f))\Phi(C)\\
&= \mathcal{G}\Psi(D)\mathcal{GF}(f)\Phi(C) = \mathcal{G}\Psi(D)\Phi\mathcal{G}(D)f.
\end{aligned}$$

$\square$

FOLGERUNG 3.17. *Seien* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *und* $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *Funktoren.* $\mathcal{F}$ *ist genau dann linksadjungiert zu* $\mathcal{G}$*, wenn es natürliche Transformationen* $\Phi : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{GF}$ *und* $\Psi : \mathcal{FG} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ *gibt mit* $(\mathcal{G}\Psi)(\Phi\mathcal{G}) = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ *und* $(\Psi\mathcal{F})(\mathcal{F}\Phi) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$.

DEFINITION 3.18. Die in Folgerung 3.17 angegeben natürlichen Transformationen $\Phi : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{GF}$ und $\Psi : \mathcal{FG} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ heißen *Einheit* bzw. *Koeinheit* für die adjungierten Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

ÜBUNG 3.19. a) Zeigen Sie, daß für einen Bimodul ${}_RM_S$ der Funktor $M \otimes_S$ - : ${}_S\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ linksadjungiert ist zu $\mathrm{Hom}_R(M,\text{-}) : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M}$ und bestimmen Sie die zugehörige Einheit und Koeinheit.

b) Zeigen Sie, daß es einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Abb}(A \times B, C) \cong \mathrm{Abb}(B, \mathrm{Abb}(A, C))$ gibt. Bestimmen Sie die zugehörigen adjungierten Funktoren und Einheit und Koeinheit.

c) Zeigen Sie, daß es einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}G, A) \cong \mathrm{Gr}(G, U(A))$ gibt. Bestimmen Sie die zugehörigen adjungierten Funktoren und Einheit und Koeinheit.
d) Zeigen Sie, daß es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathbb{K}\text{- Alg}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \text{Lie-Alg}(\mathfrak{g}, A^L)$$

gibt. Bestimmen Sie die zugehörigen adjungierten Funktoren und Einheit und Koeinheit.

Definition 3.20. Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein kovarianter Funktor. $\mathcal{G}$ gibt Anlaß zu einem *(ko-)universellen Problem* der folgenden Art:
Sei $C \in \mathcal{C}$ gegeben. Gesucht ist ein Objekt $\mathcal{F}(C) \in \mathcal{D}$ und ein Morphismus $\iota : C \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}(C))$ in $\mathcal{C}$, so daß zu jedem Objekt $D \in \mathcal{D}$ und zu jedem Morphismus $f : C \longrightarrow \mathcal{G}(D)$ in $\mathcal{C}$ genau ein Morphismus $g : \mathcal{F}(C) \longrightarrow D$ in $\mathcal{D}$ so existiert, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(C)) \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"] \\ & \mathcal{G}(D) \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Ein Paar $(\mathcal{F}(C), \iota)$, das die oben angegeben Bedingungen erfüllt, heißt eine*(ko-) universelle Lösung* des durch $\mathcal{G}$ und C definierten (ko-)universellen Problems.
Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor. $\mathcal{F}$ gibt Anlaß zu einem *universellen Problem* der folgenden Art:
Sei $D \in \mathcal{D}$ gegeben. Gesucht ist ein Objekt $\mathcal{G}(D) \in \mathcal{C}$ und ein Morphismus $\nu : \mathcal{F}(\mathcal{G}(D)) \longrightarrow D$ in $\mathcal{D}$, so daß zu jedem Objekt $C \in \mathcal{C}$ und zu jedem Morphismus $f : \mathcal{F}(C) \longrightarrow D$ in $\mathcal{D}$ genau ein Morphismus $g : C \longrightarrow \mathcal{G}(D)$ in $\mathcal{C}$ so existiert, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathcal{F}\mathcal{G}(D) \arrow[r, "\nu"'] & D \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Ein Paar $(\mathcal{G}(D), \nu)$, das die oben angegeben Bedingungen erfüllt, heißt eine *universelle Lösung* des durch $\mathcal{F}$ und D definierten universellen Problems.

SATZ 3.21. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. Dann ist durch $\mathcal{F}(C)$ und die Einheit $\iota = \Phi(C) : C \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}(C)$ eine (ko-)universelle Lösung des durch $\mathcal{G}$ und C definierten (ko-)universellen Problems gegeben. Weiterhin ist durch $\mathcal{G}(D)$ und die Koeinheit $\nu = \Psi(D) : \mathcal{F}\mathcal{G}(D) \longrightarrow D$ eine universelle Lösung des durch $\mathcal{F}$ und D definierten universellen Problems gegeben.*

BEWEIS. Nach Satz 3.16 sind $\varphi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-},\text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},\mathcal{G}\text{-})$ und $\psi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-},\mathcal{G}\text{-}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\text{-},\text{-})$ als inverse Abbildungen zueinander durch Einheit und Koeinheit definiert als $\varphi(C,D)(g) = \mathcal{G}(g)\Phi(C)$ bzw. $\psi(C,D)(f) = \Psi(D)\mathcal{F}(f)$. Also gibt es zu vorgegebenem $f : C \longrightarrow \mathcal{G}(D)$ genau ein $g : \mathcal{F}(C) \longrightarrow D$ mit $f = \varphi(C,D)(g) = \mathcal{G}(g)\Phi(C) = \mathcal{G}(g)\iota$.
Die zweite Aussage folgt analog. □

BEMERKUNG 3.22. Wenn $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ und $C \in \mathcal{C}$ gegeben sind, so kann man die (ko-)universelle Lösung $(\mathcal{F}(C), \iota : C \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}(C))$ als beste (Ko-)Approximation des Objekts C in $\mathcal{C}$ durch ein Objekt $\mathcal{F}(C)$ in $\mathcal{D}$ mit Hilfe des Funktors $\mathcal{G}$ ansehen.
Wenn $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $D \in \mathcal{D}$ gegeben sind, so kann man die universelle Lösung $(\mathcal{G}(D), \nu : \mathcal{F}\mathcal{G}(D) \longrightarrow D)$ als beste Approximation des Objekts D in $\mathcal{D}$ durch ein Objekt $\mathcal{G}(D)$ in $\mathcal{C}$ mit Hilfe des Funktors $\mathcal{F}$ ansehen.

SATZ 3.23. *Sei $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ gegeben und sei für jedes $C \in \mathcal{C}$ das durch $\mathcal{G}$ und C gegebene (ko-)universelle Problem lösbar. Dann gibt es einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zu $\mathcal{G}$.*
Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gegeben und sei für jedes $D \in \mathcal{D}$ das durch $\mathcal{F}$ und D gegebene universelle Problem lösbar. Dann gibt es einen rechtsadjungierten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ zu $\mathcal{F}$.

BEWEIS. Ist das (ko-)universelle Problem zu $\mathcal{G}$ und C lösbar durch $\iota : C \longrightarrow \mathcal{F}(C)$, so ist die Zuordnung $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(D)) \ni f \mapsto g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), D)$ mit $\mathcal{G}(g)\iota = f$ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $g \mapsto \mathcal{G}(g)\iota$. Diese ist eine natürliche Transformation, denn für $h \in \mathrm{Mor}_{D}(D, D')$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), D) \arrow[r, "\mathcal{G}(-)\iota"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C),h)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(D)) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,\mathcal{G}(h))"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(C), D') \arrow[r, "\mathcal{G}(-)\iota"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(D'))
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist nämlich

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(h))(\mathcal{G}(g)\iota) = \mathcal{G}(h)\mathcal{G}(g)\iota = \mathcal{G}(hg)\iota = \mathcal{G}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}(C), h)(g))\iota.$$

Also ist für alle $C \in \mathcal{C}$ der Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{G}(\text{-})) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$, der durch den Bifunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}(\text{-})) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ induziert wird, darstellbar. Nach Satz 3.11 gibt es also einen Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ mit $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}(\text{-})) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\text{-}), \text{-})$.
Die zweite Aussage folgt analog. $\square$

Bemerkung 3.24. Man kann die Eigenschaften, die $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$) haben muß, um einen links-(rechts-)adjungierten Funktor zu haben, charakterisieren. Eine der wesentlichen Eigenschaften dafür ist, daß $\mathcal{G}$ Limites (also direkte Produkte und Differenzkerne) erhält.

KAPITEL IV

Zur kommutativen algebraischen Geometrie

Wir können in diesem Kapitel nur die einfachste Form eines geometrischen Raumes einführen. Zunächst betrachten wir eine Menge von Punkten ohne weitere geometrische Struktur und machen an ihr den Begriff der Funktionenalgebra klar. Dann kommen wir auf Mengen von Punkten, die durch ihre Koordinaten beschrieben werden, zum Beispiel Kreis oder Parabel, allgemeiner sogenannte affine Schemata, die durch Polynomgleichungen beschrieben werden. Diese geometrischen Räume werden durch ihre Funktionenalgebren vollständig beschrieben. Hier wird sich wesentlich das Yoneda Lemma einsetzen lassen.

Beispiel 4.1. Sei X eine Menge. Dann ist $\mathbb{K}^X := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ eine $\mathbb{K}$-Algebra mit komponentweiser Addition und Multiplikation: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(fg)(x) := f(x)g(x)$.
Von unserem Standpunkt aus sehen wir $\mathbb{K}^X$ als Vektorraum mit der Addition $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$. Das definiert einen darstellbaren kontravarianten Funktor $\mathbb{K}^{-} : \mathrm{Me} \longrightarrow \mathrm{Vek}$, dargestellt durch $\mathbb{K}$. Tatsächlich ist $\mathbb{K}^h : \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^X$ für $h : X \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung, denn $\mathbb{K}^h(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(h(x)) = \alpha f(h(x)) + \beta g(h(x)) = (\alpha f h + \beta g h)(x) = (\alpha \mathbb{K}^h(f) + \beta \mathbb{K}^h(g))(x)$, also $\mathbb{K}^h(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbb{K}^h(f) + \beta \mathbb{K}^h(g)$.
Wir betrachten Homomorphismen $\tau : \mathbb{K}^X \otimes \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^{X \times Y}$, die durch $\tau(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$ definiert sind. Man muß zeigen, daß $\tau' : \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^{X \times Y}$ bilinear ist, um einen eindeutig bestimmten Homomorphismus auf

dem Tensorprodukt zu erhalten: $\tau'(f+f',g)(x,y) = (f+f')(x)g(y) = (f(x)+f'(x))g(y) = f(x)g(y)+f'(x)g(y) = \tau'(f,g)+\tau'(f',g)(x,y)$ ergibt die Additivität im linken Argument. Die Additivität im rechten Argument und die Vertauschbarkeit mit Faktoren aus $\mathbb{K}$ wird ähnlich nachgeprüft.

Zusammen erhält man eine Multiplikation $\nabla : \mathbb{K}^X \otimes \mathbb{K}^X \xrightarrow{\tau} \mathbb{K}^{X\times X} \xrightarrow{\mathbb{K}^\Delta} \mathbb{K}^X$, wobei $\Delta : X \longrightarrow X\times X$ in Me die Diagonalabbildung ist $\Delta(x) := (x,x)$. Weiter hat man ein Einselement $\eta : \mathbb{K}^{\{*\}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}^X$ mit $\varepsilon : X \longrightarrow \{*\}$ Abbildung in die einelementige Menge. Damit rechnet man jetzt nach, daß $(\mathbb{K}^X, \eta, \nabla)$ eine Algebra wird. Es gehen dabei zwei Eigenschaften wesentlich ein, nämlich daß $\mathbb{K}$ assoziativ mit Einselement ist und daß X, Δ, ε ein „Komonoid" ist:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & X\times X \arrow[d, "1\times\Delta"] \\
X\times X \arrow[r, "\Delta\times 1"'] & X\times X\times X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "1_X"] & X\times X \arrow[d, "1\times\varepsilon"] \\
X\times X \arrow[r, "\varepsilon\times 1"'] & \{*\}\times X \cong X \cong X\times\{*\}.
\end{tikzcd}$$

Für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ erhält man einen Algebren Homomorphismus $\mathbb{K}^f : \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^X$, denn die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^Y \otimes \mathbb{K}^Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathbb{K}^f\otimes\mathbb{K}^f"] & \mathbb{K}^{Y\times Y} \arrow[r, "\mathbb{K}^\Delta"] \arrow[d, "\mathbb{K}^{f\times f}"] & \mathbb{K}^Y \arrow[d, "\mathbb{K}^f"] \\
\mathbb{K}^X \otimes \mathbb{K}^X \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{K}^{X\times X} \arrow[r, "\mathbb{K}^\Delta"] & \mathbb{K}^X
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}^{\{*\}} \cong \mathbb{K} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
\mathbb{K}^Y \arrow[rr, "\mathbb{K}^f"] & & \mathbb{K}^X
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Damit ist $\mathbb{K}^{-} : \mathrm{Me} \longrightarrow \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c$ ein kontravarianter Funktor.

Wir wissen nach Definition des mengentheoretischen (kartesischen) Produkts, daß $\mathbb{K}^X = \prod_X \mathbb{K}$. Das gilt auch mit der oben angegebenen Algebrenstruktur. Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es ein maximales Ideal m_x von $\prod_X \mathbb{K}$ mit $m_x := \{f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{K}) | f(x) = 0\}$. Wenn X eine endliche Menge ist, dann sind das genau alle maximalen Ideale von $\prod_X \mathbb{K}$, ja sogar alle Primideale von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$.
Wir können jeder kommutativen Algebra A die Menge $\mathrm{Spec}(A)$ ihrer Primideale zuordenen. Das ergibt einen Funktor Spec: $\mathbb{K}$- Alg $\longrightarrow$ Me.
Wir werden jetzt in die Mengen eine Geometrie hineintragen und sehen, wie solche „geometrischen Räume" mit ihren Funktionen Algebren zusammenhängen.

Definition 4.2. Der Funktor $\mathbb{A}^1 : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$ (Vergißfunktor), der jeder kommutativen $\mathbb{K}$-Algebra A den Raum (die Menge) der Punkte (Elemente) von A zuordnet, heißt *affine Gerade*.

Lemma 4.3. *Der Funktor affine Gerade ist darstellbar.*

Beweis. Das (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) darstellende Objekt ist nach Lemma 3.1 $\mathbb{K}[x]$. □

Definition 4.4. Der Funktor $\mathbb{A}^2 : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$, der jeder kommutativen $\mathbb{K}$-Algebra A den Raum (die Menge) der Punkte (Elemente) der Ebene A^2 zuordnet, heißt *affine Ebene*.

Lemma 4.5. *Der Funktor affine Ebene ist darstellbar.*

Beweis. Das darstellende Objekt ist analog zu Lemma 3.5 $\mathbb{K}[x_1, x_2]$. □

Sei $p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ eine Familie von Polynomen. Wir wollen die (geometrische) Mannigfaltigkeit der Nullstellen dieser Polynome betrachten. Allerdings kann es in $\mathbb{K}$ möglicherweise nicht genügend viele Nullstellen geben. Daher lassen wir auch Nullstellen in Erweiterungskörpern von $\mathbb{K}$ oder noch allgemeiner in beliebigen $\mathbb{K}$-Algebren zu.

Definition 4.6. Der Funktor $\mathcal{X}$, der jeder kommutativen Algebra A die Menge der Nullstellen der Polynome (p_i) in A^n zuordnet: $\mathcal{X}(A) \subseteq A^n$, heißt *affine algebraische Mannigfaltigkeit* oder *affines Schema* in $\mathbb{A}^n$ mit den definierenden Polynomen $p_1, \ldots, p_m$. Die Elemente aus $\mathcal{X}(A)$ heißen *A-Punkte* von $\mathcal{X}$.

SATZ 4.7. *Das affine Schema $\mathcal{X}$ in $\mathbb{A}^n$ mit den definierenden Polynomen $p_1, \ldots, p_m$ ist ein darstellbarer Funktor mit der darstellenden Algebra*

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_m),$$

genannt affine Algebra *des Funktors.*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß das affine Schema $\mathcal{X} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$ mit den definierenden Polynomen $p_1, \ldots, p_m$ ein Funktor ist. Dazu definieren wir für einen Algebren Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ die induzierte Abbildung $f^n : A^n \longrightarrow B^n$ durch komponentweise Anwendung und $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(A) \longrightarrow \mathcal{X}(B)$ durch Einschränkung von f^n auf $\mathcal{X}(A)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn ist $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{X}(A)$ Nullstelle von allen Polynomen $p_1, \ldots, p_m$, so ist $p_i(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = f(p_i(a_1, \ldots, a_n)) = f(0) = 0$ für alle i, also ist auch $f^n(a_1, \ldots, a_n) = (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in B^n$ eine Nullstelle für alle Polynome. Damit ist $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(A) \longrightarrow \mathcal{X}(B)$ definiert und die Funktoreigenschaft von $\mathcal{X}$ klar.
Um zu zeigen, daß $\mathcal{X}$ durch $\mathcal{O}(\mathcal{X}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_m)$ darstellbar ist, bemerken wir zunächst, daß $(p_1, \ldots, p_m)$ das von den $p_1, \ldots, p_m$ erzeugte (zweiseitige) Ideal in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichnet. Wir wissen, daß jedes n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ einen Algebren Homomorphismus $f : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow A$ mit $f(x_1) = a_1, \ldots, f(x_n) = a_n$ eindeutig bestimmt. (Der Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist in $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c$ frei über der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$, oder $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ zusammen mit der Einbettung $\iota : \{x_1, \ldots, x_n\} \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ löst das kouniverselle Problem, das durch den Vergißfunktor $\mathcal{V} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$ und die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathrm{Me}$ definiert wird.) Dieser Algebren Homomorphismus bildet Polynome $p(x_1, \ldots, x_n)$ ab in $f(p) = p(a_1, \ldots, a_n)$. Es ist also $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann gemeinsame Nullstelle der Polynome $p_1, \ldots, p_m$, wenn $f(p_i) = p_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$, also die $p_1, \ldots, p_m$ im Kern von f liegen. Das ist genau dann der Fall, wenn f auf dem Ideal $(p_1, \ldots, p_m)$ verschwindet oder durch die Restklassenabbildung

$$\nu : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_m)$$

faktorisiert werden kann. Damit ist eine Bijektion

$$\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_m), A) \ni f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathcal{X}(A)$$

definiert. Man sieht dann leicht, daß diese Bijektion ein natürlicher Isomorphismus (in A) ist. $\square$

Wenn keine Polynome gegeben sind, so ist der Funktor der des *affinen Raumes* $\mathbb{A}^n$ der Dimension n. Mit der Vorgabe von Polynomen wird $\mathcal{X}$ ein Unterfunktor von $\mathbb{A}^n$, weil er jeweils natürlich Teilmengen $\mathcal{X}(A) \subseteq \mathbb{A}^n(A) = A^n$ definiert. Beide Funktoren sind darstellbar und die Einbettung kommt von dem Algebren Homomorphismus $\nu : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_m)$.

Übung 4.8. a) Bestimmen Sie die affine Algebra des Funktors Einheitkreis S^1 in $\mathbb{A}^2$.
b) Bestimmen Sie die affine Algebra des Funktors Einheitssphäre S^{n-1} in $\mathbb{A}^n$.
c) Sei $\mathcal{X}$ die ebene Kurve $y = x^2$. Dann ist $\mathcal{X}$ isomorph zur affinen Geraden.
d) Sei $\mathcal{Y}$ die ebene Kurve $xy = 1$. Dann ist $\mathcal{Y}$ nicht zur affinen Geraden isomorph.
e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Zeigen Sie, daß der Einheiten Funktor $U : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \text{Me}$ aus Lemma 3.3 natürlich isomorph ist zum Einheitskreis Funktor S^1. (Hinweis: Es gibt einen Algebren Isomorphismus zwischen den darstellenden Algebren $\mathbb{K}[e, e^{-1}]$ und $\mathbb{K}[c, s]/(c^2 + s^2 - 1)$.)
f)* Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei p ein irreduzibles quadratisches Polynom in $\mathbb{K}[x, y]$ und sei $\mathcal{Z}$ der durch p definierte Kegelschnitt mit der affinen Algebra $\mathbb{K}[x, y]/(p)$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{Z}$ entweder zu $\mathcal{X}$ oder zu $\mathcal{Y}$ natürlich isomorph ist.

Bemerkung 4.9. Eine affine Algebra eines affinen Schemas legt die Polynome $p_1, \ldots, p_n$ nicht eindeutig fest, sondern lediglich das von diesen erzeugte Ideal im Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Aber auch die Anzahl der Algebren Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ ist nicht eindeutig bestimmt. *Affine Algebren* sind deshalb (als Algebren) endlich erzeugte kommutative Algebren.
Die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{X}(\mathbb{K})$ eines affinen Schemas $\mathcal{X}$ im Grundkörper $\mathbb{K}$ heißen *rationale Punkte*. Sie reichen nicht aus, um das affine Schema zu charakterisieren. So haben für $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ die affinen Schemata $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ mit den affinen Algebren $\mathcal{O}(\mathcal{X}) := \mathbb{K}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$ und $\mathcal{O}(\mathcal{Y}) := \mathbb{K}[x]/(x^2 + 1)$ keine rationalen Punkte, jedoch hat das Schema $\mathcal{Y}$ genau zwei komplexe Punkte und $\mathcal{X}$ unendlich viele komplexe Punkte, also ist $\mathcal{X}(\mathbb{C}) \not\cong \mathcal{Y}(\mathbb{C})$. Das liegt nicht etwa an den Einbettungen in unterschiedliche Räume $\mathbb{A}^2$ bzw. $\mathbb{A}^1$, weil auch gilt $\mathcal{O}(\mathcal{Y}) = \mathbb{K}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{K}[x, y]/(x^2 + 1, y)$.
Da jedes affine Schema $\mathcal{X}$ isomorph zu dem Funktor $\mathbb{K}\text{- Alg}_c(\mathcal{O}(\mathcal{X}), \text{-})$ ist, werden wir in Zukunft, um die Betrachtung störender Isomorphismen zu

vermeiden, diese beiden Funktoren identifizieren. (Wir verändern dadurch lediglich $\mathcal{X}$ geringfügig.)

SATZ 4.10. *Sei $\mathcal{X}$ ein affines Schema mit der affinen Algebra $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$. Dann ist $A \cong \mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ als $\mathbb{K}$-Algebren, wobei $\mathcal{V} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$ der Vergißfunktor ist. Durch den Isomorphismus wird eine (in B) natürliche Transformation $A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ induziert.*

BEWEIS. Wir geben zunächst einen Isomorphismus zwischen den Mengen A und $\mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ an. Wegen $\mathcal{X} = \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(A, \text{-})$ und $\mathcal{V} = \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], \text{-})$ gilt nach dem Yoneda Lemma für die Mengen $\mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V}) = \mathrm{Nat}(\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(A, \text{-}), \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], \text{-})) \cong \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A) = \mathcal{V}(A) \cong A$. Da A eine Algebra ist, induziert ein solcher Isomorphismus von Mengen eine Algebrenstruktur auf $\mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$.
Sei $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ der angegebene Isomorphismus. Wir beschreiben jetzt die genaue Aktion $\psi(B) : A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ von A auf $\mathcal{X}(B)$. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein B-Punkt aus $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}_c(A, B) = \mathcal{X}(B)$. Sei weiterhin a ein Element aus A. Dieses induziert vermöge des oben angegebenen Isomorphismus den Algebren Homomorphismus $g_a : \mathbb{K}[x] \longrightarrow A$, der x auf a abbildet. Dieser Algebren Homomorphismus induziert die natürliche Transformation $\varphi(a) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}$, die auf B durch Verknüpfung mit g_a definiert ist, also $\varphi(a)(B)(f) = (\mathbb{K}[x] \xrightarrow{g_a} A \xrightarrow{f} B)$, oder, da ein solcher Homomorphismus durch das Bild von x vollständig beschrieben ist, $\varphi(a)(B)(f)(x) = f(a)$. Da für jedes $a \in A$ das Bild $\varphi(a) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}$ eine natürliche Transformation ist, haben wir Abbildungen $\psi(B) : A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ mit $\psi(B)(a, f) = f(a)$. Für $a, a' \in A$ ist $\varphi(a)(B)(f)(x) = f(a)$ und $\varphi(a')(B)(f)(x) = f(a')$, also $\varphi(a + a')(B)(f)(x) = f(a+a') = f(a)+f(a') = \varphi(a)(B)(f)(x)+\varphi(a')(B)(f)(x) = (\varphi(a)(B)(f) + \varphi(a')(B)(f))(x) = (\varphi(a)(B) + \varphi(a')(B))(f)(x) = (\varphi(a) + \varphi(a'))(B)(f)(x)$ und analog $\varphi(aa')(B)(f)(x) = f(aa') = f(a)f(a') = (\varphi(a) \cdot \varphi(a'))(B)(f)(x)$, womit $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ und $\varphi(aa') = \varphi(a) \cdot \varphi(a')$ folgt. Addition und Multiplikation in $\mathrm{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ sind also durch Addition und Multiplikation der Werte $f(a) + f(a')$ bzw. $f(a)f(a')$ definiert. Schließlich kommutiert für jeden Algebren Homomorphismus $f : B \longrightarrow B'$

$$\begin{tikzcd}
A \times \mathcal{X}(B) \arrow[r, "\psi(B)"] \arrow[d, "A \times \mathcal{X}(f)"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A \times \mathcal{X}(B') \arrow[r, "\psi(B')"'] & B',
\end{tikzcd}$$

womit $\psi(B) : A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ eine natürliche Transformation wird. $\square$

Bemerkung 4.11. Wegen der Operation $A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ wird A auch *Funktionen Algebra* von $\mathcal{X}$ genannt.
Man kann zeigen, daß A universell in dieser Eigenschaft ist, d.h. zu jeder kommutativen Algebra D und zu jeder natürlichen Transformation $\rho : D \times \mathcal{X}(\text{-}) \longrightarrow \text{-}$ gibt es genau einen Algebren Homomorphismus $f : D \longrightarrow A$, so daß das Dreieck

$$\begin{tikzcd}
D \times \mathcal{X}(B) \arrow[d, "f \times 1_{\mathcal{X}(B)}"'] \arrow[dr, "\rho(B)"] & \\
A \times \mathcal{X}(B) \arrow[r, "\psi(B)"'] & B
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir werden dieses Ergebnis später für nicht-kommutative Algebren beweisen. Aus der universellen Eigenschaft folgt jedenfalls, wie bei jeder universellen Eigenschaft, die Eindeutigkeit von A bis auf Isomorphie dafür, eine Funktionenalgebra für $\mathcal{X}$ zu sein.
Sei $B = \mathbb{K}$ und $\mathcal{X}$ ein affines Schema mit der affinen Algebra $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$. Wenn $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ ein rationaler Punkt von $\mathcal{X}$ ist, d.h. ein Algebren Homomorphismus, dann ist $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$, also $\mathrm{Ker}(f)$ ein maximales Ideal der Kodimension von $\mathcal{X}$. Ist umgekehrt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ der Kodimension 1 in A gegeben, so induziert dieses genau einen rationalen Punkt $f : A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal in A, so ist $A/\mathfrak{m}$ eine als $\mathbb{K}$-Algebra endlich erzeugte Körpererweiterung von $\mathbb{K}$. Diese muß mit $\mathbb{K}$ übereinstimmen, womit $\mathfrak{m}$ automatisch die Kodimension 1 hat. Man nennt die maximalen Ideale von A dann auch das *Maximal-Spektrum* $\mathrm{Spec}_m(A)$ von A. Dieser Ansatz der algebraischen Geometrie gestattet es also, die (rationalen) Punkte eines affinen Schemas aus der Funktionen Algebra zurück zu gewinnen. Wir werden diesen Ansatz nicht weiter verfolgen. Wir definieren jedoch in Anlehnung an dieses Vorgehen das Spektrum einer Algebra A wie folgt.

Definition 4.12. Sei $\mathcal{C} = \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Aff}$ die Kategorie der endlich erzeugten kommutativen (oder affinen vgl. 4.9) $\mathbb{K}$-Algebren. Ein darstellbarer Funktor $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Aff}(A, \text{-}) : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Aff} \longrightarrow \mathrm{Me}$ heißt *affine algebraische Mannigfaltigkeit.* Die affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten zusammen mit den natürlichen Transformationen bilden die *Kategorie der affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten* oder *geometrischen Räume* $\mathrm{Geom}(\mathbb{K})$ über $\mathbb{K}$. Der Funktor, der jeder affinen Algebra A die durch A dargestellte affine algebraische Mannigfaltigkeit zuordnet, wird das *Spektrum* von A genannt: $\mathrm{Spec} : \mathbb{K}\text{- Aff} \longrightarrow \mathrm{Geom}(\mathbb{K})$. Wegen des Yoneda Lemmas ist Spec eine Anti-Äquivalenz von Kategorien. Ein geometrischer Raum ist also vollständig durch seine Funktionen Algebra beschrieben.

Da auch beliebige (nicht endlich erzeugte) kommutative Algebren darstellbare Funktoren (nun auf der Kategorie aller kommutativen Algebren) definieren, haben wir auch unendlich-dimensionale geometrische Räume $\mathrm{Geom}_\infty(\mathbb{K})$ und ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\text{- Aff} \arrow[r, "\mathrm{Spec}"] \arrow[d] & \mathrm{Geom}(\mathbb{K}) \arrow[d] \\
\mathbb{K}\text{- Alg}_c \arrow[r, "\cong^0"'] & \mathrm{Geom}_\infty(\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Wir bestimmen nun noch die Form von Morphismen zwischen geometrischen Räumen.

Satz 4.13. *Seien $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}^r$ und $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{A}^s$ affine algebraische Mannigfaltigkeiten und $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es Polynome*

$$p_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, p_s(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r],$$

so daß für alle $A \in \mathbb{K}\text{- Alg}$ und alle $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{X}(A)$ gilt

$$\varphi(A)(a_1, \ldots, a_r) = (p_1(a_1, \ldots, a_r), \ldots, p_s(a_1, \ldots, a_r)),$$

d.h. die natürlichen Transformationen zwischen affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten sind polynomial.

Beweis. Seien $\mathcal{O}(\mathcal{X}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I$ und $\mathcal{O}(\mathcal{Y}) = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]/J$. Für $A \in \mathbb{K}\text{- Alg}$ und $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathcal{X}(A)$ sei $f : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I \longrightarrow A$ mit $f(x_i) = a_i$ der unter $\mathcal{X}(A) \cong \mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I, A)$ zugeordnete Homomorphismus. Die natürliche Transformation φ wird durch Verknüpfung mit einem Homomorphismus $g : \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]/J \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I$ induziert, also gilt

$$\varphi(A) : \mathbb{K}\text{- Alg}_c(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]/I, A) \ni f \mapsto fg \in \mathbb{K}\text{- Alg}_c(\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]/J, A).$$

Da g beschrieben wird durch $g(y_i) = p_i(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\varphi(A)(a_1, \dots, a_s) = (fg(y_1), \dots, fg(y_s)) \\
&= (f(p_1(x_1, \dots, x_r)), \dots, f(p_s(x_1, \dots, x_r))) \\
&= (p_1(a_1, \dots, a_r), \dots, p_s(a_1, \dots, a_r)). \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 4.14. Der Isomorphismus zwischen der affinen Geraden (4.2) und der Parabel (4.8 d)) ist gegeben durch den Isomorphismus $f : \mathbb{K}[x, y]/(y - x^2) \longrightarrow \mathbb{K}[z]$, $f(x) = z$, $f(y) = z^2$ mit der Umkehrabbildung $f^{-1}(z) = x$. Auf den affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten der affinen Geraden $\mathbb{A}$ bzw. der Parabel $\mathbb{P}$ ist die induzierte Abbildung $f : \mathbb{A}(A) \ni a \mapsto (a, a^2) \in \mathbb{A}(A)$ bzw. $f^{-1} : \mathbb{P}(A) \ni (a, b) \mapsto a \in \mathbb{A}(A)$.

KAPITEL V

Limites, Kolimites, Produkte und Differenzkerne

Wir benötigen für weitere Konstruktionen noch einige zusätzliche kategorietheoretische Begriffe. Diese sollen hier in knapper Form behandelt werden.

Definition 5.1. Ein *Diagrammschema* $\mathcal{D}$ ist eine kleine Kategorie (d.h. die Objektklasse ist eine Menge). Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein *Diagramm* in $\mathcal{C}$ mit dem Diagrammschema $\mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Beispiel 5.2. (für Diagrammschemata) a) Die leere Kategorie $\mathcal{D}$.
b) Die Kategorie mit genau einem Objekt D und genau einem Morphismus 1_D.
c) Die Kategorie mit zwei Objekten D_1, D_2 und einem Morphismus $f : D_1 \longrightarrow D_2$ (außer den beiden Identitäten).
d) Die Kategorie mit zwei Objekten D_1, D_2 und zwei Morphismen $f, g : D_1 \longrightarrow D_2$ zwischen ihnen.
e) Die Kategorie mit einer Familie von Objekten $(D_i | i \in I)$ und den zugehörigen Identitäten.
f) Die Kategorie mit vier Objekten $D_1, \ldots, D_4$ und Morphismen f, g, h, k, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & D_2 \arrow[d, "k"] \\ D_3 \arrow[r, "h"'] & D_4 \end{tikzcd}$$

also $kf = hg$.

Definition 5.3. Sei $\mathcal{D}$ ein Diagrammschema und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Jedes Objekt $C \in \mathcal{C}$ definiert ein *konstantes* Diagramm $\mathcal{K}_C : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{K}_C(D) := C$ für alle $D \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{K}(f) := 1_C$ für alle Morphismen in $\mathcal{D}$. Jeder Morphismus $f : C \longrightarrow C'$ in $\mathcal{C}$ definiert eine konstante natürliche Transformation $\mathcal{K}_f : \mathcal{K}_C \longrightarrow \mathcal{K}_{C'}$ mit $\mathcal{K}_f(D) = f$. Damit wird ein *Konstanten Funktor* $\mathcal{K} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{C}$ von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Diagramme $\mathrm{Funkt}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ definiert.
Sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein Objekt C und eine natürliche Transformation $\pi : \mathcal{K}_C \longrightarrow \mathcal{F}$ heißt *Limes* oder *projektiver Limes* des Diagramms $\mathcal{F}$ mit der *Projektion* π, wenn zu jedem Objekt $C' \in \mathcal{C}$ und zu jeder natürlichen Transformation $\varphi : \mathcal{K}_{C'} \longrightarrow \mathcal{F}$ genau ein Morphismus $f : C' \longrightarrow C$ so existiert, daß

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_{C'} \arrow[d, "\mathcal{K}_f"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathcal{K}_C \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. für alle Morphismen $g : D_i \longrightarrow D_j$ in $\mathcal{D}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \mathcal{F}(D_i) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\ & \mathcal{F}(D_j) \end{tikzcd}$$

(π ist natürliche Transformation) und für alle Objekte D_i in $\mathcal{D}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ C \arrow[r, "\pi_i"'] & \mathcal{F}(D_i). \end{tikzcd}$$

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ *besitzt Limites* für Diagrammschemata der Form $\mathcal{D}$, wenn zu jedem Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ über $\mathcal{D}$ in $\mathcal{C}$ ein Limes existiert. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *vollständig*, wenn jedes Diagramm in $\mathcal{C}$ einen Limes besitzt.

Beispiel 5.4. a) Sei $\mathcal{D}$ ein Diagrammschema bestehend aus zwei Objekten D_1, D_2 und den Identitäten. Ein Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist definiert durch die Vorgabe von zwei Objekten C_1 und C_2 in $\mathcal{C}$. Ein Objekt $C_1 \times C_2$ zusammen mit zwei Morphismen $\pi_1 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C_1$ und $\pi_2 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C_2$ heißt *Produkt* der beiden Objekte, wenn $C_1 \times C_2, \pi : \mathcal{K}_{C_1 \times C_2} \longrightarrow \mathcal{F}$ ein Limes ist, d.h. wenn es zu jedem Objekt C' in $\mathcal{C}$ und zu je zwei Morphismen $\varphi_1 : C' \longrightarrow C_1$ und $\varphi_2 : C' \longrightarrow C_2$ genau einen Morphismus $f : C' \longrightarrow C_1 \times C_2$ gibt, so daß

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ C_1 & C_1 \times C_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die beiden Morphismen $\pi_1 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C_1$ und $\pi_2 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C_2$ heißen die *Projektionen* des Produkts auf die einzelnen Faktoren.
b) Sei $\mathcal{D}$ ein Diagrammschema bestehend aus einer endlichen (nicht-leeren) Menge von Objekten $D_1, \ldots, D_n$ und den zugehörigen Identitäten. Ein Limes eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ heißt *endliches Produkt* der Objekte $C_1 := \mathcal{F}(D_1), \ldots, C_n := \mathcal{F}(D_n)$ und wird mit $C_1 \times \ldots \times C_n = \prod_{i=1}^n C_i$ bezeichnet.
c) Ein Limes über einem diskreten Diagramm (d.h. $\mathcal{D}$ besitzt nur die Identitäten als Morphismen) heißt *Produkt* der Objekte $C_i := \mathcal{F}(D_i)$, $i \in I$ und wird mit $\prod_I C_i$ bezeichnet.
d) Sei $\mathcal{D}$ das leere Diagrammschema und $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ das (einzig mögliche) leere Diagramm. Der Limes $C, \pi : \mathcal{K}_C \longrightarrow \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ heißt *Endobjekt.* Er hat die Eigenschaft, daß es zu jedem Objekt C' in $\mathcal{C}$ (die eindeutig bestimmte natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{K}_{C'} \longrightarrow \mathcal{F}$ braucht nicht angegeben zu werden) genau einen Morphismus $f : C' \longrightarrow C$ gibt. In Me ist die einpunktige Menge ein Endobjekt. In Ab, Gr, Vek ist die Nullgruppe 0 ein Endobjekt.
e) Sei $\mathcal{D}$ das Diagrammschema aus 5.2 d) mit zwei Objekten und zwei Morphismen (verschieden von den beiden Identitäten). Ein Diagramm über $\mathcal{D}$ ist gegeben durch zwei Objekte C_1 und C_2 und zwei Morphismen $g, h : C_1 \longrightarrow C_2$. Der Limes eines solchen Diagramms heißt *Differenzkern* der beiden Morphismen und ist gegeben durch ein Objekt $\mathrm{Ker}(g, h)$ und einen Morphismus $\pi_1 : \mathrm{Ker}(g, h) \longrightarrow C_1$. Der zweite Morphismus nach C_2 entsteht durch die Komposition $\pi_2 = g\pi_1 = h\pi_1$. Der Differenzkern hat die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem Objekt C' und jedem Morphismus $\varphi_1 : C' \longrightarrow C_1$ mit $g\varphi_1 = h\varphi_1 (= \varphi_2)$ gibt es genau einen Morphismus $f : C' \longrightarrow \mathrm{Ker}(g, h)$ mit $\pi_1 f = \varphi_1$ (und damit $\pi_2 f = \varphi_2$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\varphi_1"] & \\ \mathrm{Ker}(g,h) \arrow[r, "\pi_1"] & C_1 \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Übung 5.5. a) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ein diskretes Diagramm. Man zeige, daß das kartesische Produkt über $\mathcal{F}$ mit dem kategorietheoretischen Produkt übereinstimmt.
b) Sei $\mathcal{D}$ ein Morphismenpaar wie in 5.4 e) und sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ein Diagramm. Man zeige, daß die Menge $\{x \in \mathcal{F}(D_1) | \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(g)(x)\}$ mit der Einbettung in $\mathcal{F}(D_1)$ Differenzkern von $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ist.
c) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ein Diagramm. Man zeige, daß die Menge

$$\{(x_D | D \in \mathrm{Ob}\, D, x_D \in \mathcal{F}(D)) | \forall (f : D \longrightarrow D') \in \mathcal{D} : \mathcal{F}(f)(x_D) = x_{D'}\}$$

mit den Projektionen auf die einzelnen Komponenten der Familien Limes von $\mathcal{F}$ ist.

Definition 5.6. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein Objekt C und eine natürliche Transformation $\iota : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{K}_C$ heißt *Kolimes* oder *induktiver Limes* des Diagramms $\mathcal{F}$ mit der *Injektion* ι, wenn zu jedem Objekt $C' \in \mathcal{C}$ und zu jeder natürlichen Transformation $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{K}_{C'}$ genau ein Morphismus $f : C \longrightarrow C'$ so existiert, daß

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{K}_C \arrow[d, "\mathcal{K}_f"] \\ & \mathcal{K}_{C'} \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. für alle Morphismen $g : D_i \longrightarrow D_j$ in $\mathcal{D}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(D_i) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"'] \arrow[dr, "\iota_i"] & \\ \mathcal{F}(D_j) \arrow[r, "\iota_j"'] & C \end{tikzcd}$$

(ι ist natürliche Transformation) und für alle Objekte D_i in $\mathcal{D}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(D_i) \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & C \arrow[d, "f"] \\ & C'. \end{tikzcd}$$

Die speziellen Kolimites, die über den Diagrammen wie in Beispiel 5.4 gebildet werden, heißen *Koprodukt, Anfangsobjekt* bzw. *Differenz-Kokern.*

BEISPIEL 5.7. In Vek ist 0 ein Anfangsobjekt. In $\mathbb{K}$- Alg ist $\mathbb{K}$ ein Anfangsobjekt. In Geom ist der einelementige Funktor $A \mapsto \{*\}$ ein Endobjekt. In $\mathbb{K}$- Alg ist $\{a \in A | f(a) = g(a)\}$ der Differenzkern der beiden Algebren Homomorphismen $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow B$. In $\mathbb{K}$- Alg stimmen das kartesische Produkt (Paarmengenbildung) und das (kategorietheoretische) Produkt überein.

BEMERKUNG 5.8. Ein Kolimes eines Diagramms $\mathcal{C}$ ist in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ Limes des entsprechenden (dualen) Diagrams. Daher ergeben Sätze über Limites duale Sätze über Kolimites.

SATZ 5.9. *Limites und Kolimites von Diagrammen sind bis auf Isomorphie eindeutig.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm und seien C, π und $\tilde{C}, \tilde{\pi}$ Limites von $\mathcal{F}$. Dann gibt es jeweils genau einen Morphismus $f : \tilde{C} \longrightarrow C$ und einen Morphismus $g : C \longrightarrow \tilde{C}$ mit $\pi\mathcal{K}_f = \tilde{\pi}$ und $\tilde{\pi}\mathcal{K}_g = \pi$. Dann ist aber $\pi\mathcal{K}_{1_C} = \pi\,\mathrm{id}_{\mathcal{K}_C} = \pi = \tilde{\pi}\mathcal{K}_g = \pi\mathcal{K}_f\mathcal{K}_g = \pi\mathcal{K}_{fg}$ und analog $\tilde{\pi}\mathcal{K}_{1_{\tilde{C}}} = \tilde{\pi}\mathcal{K}_{gf}$. Wegen der Eindeutigkeit folgt daraus $1_C = fg$ und $1_{\tilde{C}} = gf$. $\square$

BEMERKUNG 5.10. Nachdem die Eindeutigkeit des Limes bzw. Kolimes (bis auf Isomorphie) nachgewiesen ist, können wir jetzt eine einheitliche Bezeichnungsweise einführen. Der Limes des Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ wird mit $\varprojlim(\mathcal{F})$ bezeichnet, der Kolimes mit $\varinjlim(\mathcal{F})$.

SATZ 5.11. *Wenn $\mathcal{C}$ beliebige Produkte und Differenzkerne besitzt, dann besitzt $\mathcal{C}$ beliebige Limites, d.h. $\mathcal{C}$ ist vollständig.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{D}$ ein Diagrammschema und $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Wir bilden zunächst die Produkte $\prod_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}} \mathcal{F}(D)$ und $\prod_{f \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}} \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f))$, wobei $\mathrm{Zi}(f)$ das Ziel des Morphismus $f : D' \longrightarrow D''$ in $\mathcal{D}$ ist, also in diesem Falle $\mathrm{Zi}(f) = D''$. Für jeden Morphismus $f : D' \longrightarrow D''$ definieren wir zwei Morphismen wie folgt:

$$p_f := \pi_{\mathcal{F}(D'')} : \prod_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{F}(D'') = \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f))$$

und

$$q_f := \mathcal{F}(f)\pi_{\mathcal{F}(D')} : \prod_{D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{F}(D') \longrightarrow \mathcal{F}(D'') = \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f)).$$

Diese beiden Familien von Morphismen induzieren zwei Morphismen in das entsprechende Produkt:

$$p, q : \prod_{D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \longrightarrow \prod_{f \in \mathrm{Mor} \mathcal{D}} \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f))$$

mit $\pi_f q = q_f$ und $\pi_f p = p_f$. Wir zeigen jetzt, daß der Differenzkern dieser beiden Morphismen

$$\mathrm{Ker}(p,q) \xrightarrow{\ \psi\ } \prod_{D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{f \in \mathrm{Mor} \mathcal{D}} \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f))$$

Limes des Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist. Es ist $p\psi = q\psi$. Zunächst ergibt $\rho(D) := \pi_{\mathcal{F}(D)}\psi : \mathrm{Ker}(p,q) \longrightarrow \prod_{D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$ eine Familie von Morphismen mit $D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$. Ist $f : D' \longrightarrow D''$ in $\mathcal{D}$ gegeben, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(p,q) \arrow[r, "\rho(D')"] \arrow[dr, "\rho(D'')"'] & \mathcal{F}(D') \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\
& \mathcal{F}(D'')
\end{tikzcd}$$

kommutativ wegen $\mathcal{F}(f)\rho(D') = \mathcal{F}(f)\pi_{\mathcal{F}(D')}\psi = q_f\psi = \pi_f q\psi = \pi_f p\psi = p_f\psi = \pi_{\mathcal{F}(D'')}\psi = \rho(D'')$. Damit ist eine natürliche Transformation $\rho : \mathcal{K}_{\mathrm{Ker}(p,q)} \longrightarrow \mathcal{F}$ gegeben.

Sei nun ein Objekt C' gegeben und eine natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{K}_{C'} \longrightarrow \mathcal{F}$. Dann ist dadurch genau ein Morphismus $g : C' \longrightarrow \prod_{D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}} \mathcal{F}(D)$ definiert mit $\pi_{\mathcal{F}(D)} g = \varphi(D)$ für alle $D \in \mathcal{D}$. Da φ eine natürliche Transformation ist, haben wir $\varphi(D'') = \mathcal{F}(f)\varphi(D')$ für jeden Morphismus $f : D' \longrightarrow D''$. Wir erhalten damit $\pi_f p g = p_f g = \pi_{\mathcal{F}(D'')} g = \varphi(D'') = \mathcal{F}(f)\varphi(D') = \mathcal{F}(f)\pi_{\mathcal{F}(D')} g = q_f g = \pi_f q g$ für alle Morphismen $f : D' \longrightarrow D''$, also $pg = qg$. Daher läßt sich g eindeutig durch den Differenzkern $\psi : \mathrm{Ker}(p,q) \longrightarrow \prod_{D \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}} \mathcal{F}(D)$ faktorisieren als $g = \psi h$ mit $h : C' \longrightarrow \mathrm{Ker}(p,q)$. Es ist dann $\rho(D)h = \pi_{\mathcal{F}(D)}\psi h = \pi_{\mathcal{F}(D)} g = \varphi(D)$ für alle $D \in \mathcal{D}$, also $\rho\mathcal{K}_h = \varphi$.

Wenn schließlich ein weiterer Morphismus $h' : C' \longrightarrow \mathrm{Ker}(p,q)$ mit $\rho\mathcal{K}_{h'} = \varphi$ gegeben ist, dann ist $\pi_{\mathcal{F}(D)}\psi h' = \rho(D)h' = \varphi(D) = \rho(D)h = \pi_{\mathcal{F}(D)}\psi h$, also $\psi h' = \psi h = g$. Wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung von g durch ψ folgt $h = h'$. Damit ist $(\mathrm{Ker}(p,q), \rho)$ Limes von $\mathcal{F}$. $\square$

Bemerkung 5.12. Der Beweis des vorstehenden Satzes zeigt zugleich die explizite Konstruktion des Limes von $\mathcal{F}$ als Differenzkern

$$\mathrm{Ker}(p,q) \xrightarrow{\psi} \prod_{D\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}} \mathcal{F}(D) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{f\in \mathrm{Mor}\mathcal{D}} \mathcal{F}(\mathrm{Zi}(f))$$

Der Limes kann also als Unterobjekt eines geeigneten Produkts dargestellt werden. Dual kann der Kolimes als Faktorobjekt eines geeignetes Koprodukts dargestellt werde. Wir werden diese Konstruktion später verwenden. Wichtig für uns ist noch die Vertauschbarkeit von Funktoren mit der Bildung von Limites bzw. Kolimites. Wir sagen, daß ein Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ Limites über dem Diagrammschema $\mathcal{D}$ *erhält*, wenn für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ gilt $\varprojlim(\mathcal{G}\mathcal{F}) \cong \mathcal{G}(\varprojlim(\mathcal{F}))$.

Satz 5.13. *Kovariante darstellbare Funktoren erhalten Limites. Kontravariante darstellbare Funktoren bilden Kolimites in Limites ab.*

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die zweite Aussage ist dual dazu. Für ein Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Me}$ ist

$$\{(x_D | D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}, x_D \in \mathcal{F}(D)) | \forall (f : D \longrightarrow D') \in \mathcal{D} : \mathcal{F}(f)(x_D) = x_{D'}\}$$

nach Übung 5.5 Limes von $\mathcal{F}$. Sei nun ein Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ gegeben und sei $\varprojlim(\mathcal{F})$ der Limes. Sei weiterhin der darstellbare Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', \text{-}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ gegeben. Nach Definition des Limes von $\mathcal{F}$ gibt es zu jeder natürlichen Transformation $\varphi : \mathcal{K}_{C'} \longrightarrow \mathcal{F}$ genau einen Morphismus $f : C' \longrightarrow \varprojlim(\mathcal{F})$ mit $\pi\mathcal{K}_f = \varphi$. Dadurch ist ein Isomorphismus $\mathrm{Nat}(\mathcal{K}_{C'}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', \varprojlim(\mathcal{F}))$ gegeben. Damit ist

$$\begin{aligned}
&\varprojlim(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \mathcal{F})) \cong \\
&\{(\varphi(D) : C' \longrightarrow \mathcal{F}(D) | D \in \mathcal{D}) | \forall (f : D \longrightarrow D') \in \mathcal{D} : \mathcal{F}(f)\varphi(D) = \varphi(D')\} \\
&= \mathrm{Nat}(\mathcal{K}_{C'}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', \varprojlim(\mathcal{F})). \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 5.14. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ linksadjungiert zu $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$. Dann erhält $\mathcal{F}$ Kolimites und $\mathcal{G}$ Limites.*

Beweis. Für ein Diagramm $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow C$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \varprojlim(\mathcal{G}\mathcal{H})) &\cong \varprojlim \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}\mathcal{H}) \cong \varprojlim \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}\text{-}, \mathcal{H}) \cong \\
&\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}\text{-}, \varprojlim(\mathcal{H})) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \mathcal{G}(\varprojlim(\mathcal{H}))),
\end{aligned}$$

also $\varprojlim(\mathcal{G}\mathcal{H}) \cong \mathcal{G}(\varprojlim(\mathcal{H}))$ als darstellende Objekte. Der Beweis für den linksadjungierten Funktor erfolgt analog. $\square$

KAPITEL VI

Algebraische Gruppen und Hopf Algebren

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, den Begriff einer Gruppe G in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ zu definieren. Die eine Möglichkeit ist zu fordern, daß die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G)$ für alle $X \in \mathcal{C}$ eine Gruppe wird und dies funktoriell (d.h. natürlich) in X. Die zweite Möglichkeit ist, eine Multiplikation $\nabla_G : G \times G \longrightarrow G$ und analog neutrales Element und Inversenbildung zu definieren, die kommutative Diagramme für die Assoziativität etc. bilden. Zu der letzteren Definition benötigt man die Existenz gewisser Produkte in der Kategorie $\mathcal{C}$, sie ist also enger als die erste Definition. Besitzt $\mathcal{C}$ jedoch Produkte und Endobjekt, so sind beide Definitionen äquivalent. Das werden wir in diesem Abschnitt zeigen und ausnutzen.

Lemma 6.1. *1) In der Kategorie der kommutativen Algebren ist das Tensorprodukt von Algebren das Koprodukt.*
2) In der Kategorie der kokommutativen Koalgebren ist das Tensorprodukt von Koalgebren das Produkt.

Beweis. 1) Seien A und B kommutative $\mathbb{K}$-Algebren. Dann ist $A \otimes B$ wieder eine kommutative Algebra mit der Multiplikation

$$\nabla_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \stackrel{1\otimes\tau\otimes 1}{\longrightarrow} A \otimes A \otimes B \otimes B \stackrel{\nabla\otimes\nabla}{\longrightarrow} A \otimes B.$$

Weiter sind die linearen Abbildungen $\iota_A := 1_A \otimes \eta : A \cong A \otimes \mathbb{K} \longrightarrow A \otimes B$ bzw. $\iota_B := \eta \otimes 1_B : B \cong \mathbb{K} \otimes B \longrightarrow A \otimes B$ Algebren Homomorphismen.

Seien nun eine weitere kommutative Algebra C und Algebren Homomorphismen $f_A : A \longrightarrow C$ und $f_B : B \longrightarrow C$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß es einen eindeutig bestimmten Algebren Homomorphismus $f : A \otimes B \longrightarrow C$ so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "f_A"'] & A \otimes B \arrow[d, "f"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "f_B"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Dazu sei $f := \nabla_C(f_A \otimes f_B) : A \otimes B \longrightarrow C \otimes C \longrightarrow C$, also $f(a \otimes b) = f_A(a) f_B(b)$. Dieses ist ein Algebren Homomorphismus, weil in einer kommmutativen Algebra C die Multiplikation $\nabla : C \otimes C \longrightarrow C$ ein Algebren Homomorphismus ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C \otimes C \arrow[r, "1 \otimes \tau \otimes 1"] \arrow[d, "\nabla \otimes \nabla"'] & C \otimes C \otimes C \otimes C \arrow[r, "\nabla \otimes \nabla"] & C \otimes C \arrow[d, "\nabla"] \\ C \otimes C \arrow[rr, "\nabla"] & & C \end{tikzcd}$$

kommutiert nämlich. Außerdem erhält ∇ die Eins der Algebra.
Es gelten nun $f\iota_A(a) = f(1_A \otimes \eta)(a) = f(a \otimes 1) = \nabla(f_A(a) \otimes f_B(1)) = f_A(a)$ und $f\iota_B = f_B$. Sei ein weiterer Algebren Homomorphismus $g : A \otimes B \longrightarrow C$ mit $g\iota_A = f_A$ und $g\iota_B = f_B$ gegeben. Dann ist $g(a \otimes b) = g((a \otimes 1)(1 \otimes b)) = g(\iota(a)\iota(b)) = g\iota(a) g\iota(b) = f_A(a) f_B(b) = f(a \otimes b)$, also $f = g$. Damit ist nachgewiesen, daß $(A \otimes B, (\iota_A, \iota_B))$ ein Koprodukt von A und B in der Kategorie $\mathbb{K}$- Alg_c der kommutativen $\mathbb{K}$-Algebren ist.
2) Der Beweis für Koalgebren verläuft im Prinzip dual, läßt sich aber nicht direkt aus dem vorhergehenden Teil durch Dualisieren erhalten, weil wir mit Elementen gerechnet haben.
Seien also C und D kokommutative $\mathbb{K}$-Koalgebren. Dann ist $C \otimes D$ wieder eine kokommutative Koalgebra mit der Komultiplikation

$$\Delta_{C \otimes D} : C \otimes D \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} C \otimes D \otimes C \otimes D.$$

Weiter sind die linearen Abbildungen $\pi_C := 1_C \otimes \varepsilon : C \otimes D \longrightarrow C \otimes \mathbb{K} \cong C$ bzw. $\pi_D := \varepsilon_C \otimes 1_D : C \otimes D \longrightarrow \mathbb{K} \otimes D \cong D$ Koalgebren Homomorphismen.

Seien nun eine weitere kokommutative Koalgebra A und Koalgebren Homomorphismen $f_C : A \longrightarrow C$ und $f_D : A \longrightarrow D$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß es einen eindeutig bestimmten Koalgebren Homomorphismus $f : A \longrightarrow C \otimes D$ so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_C"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_D"] & \\ C & C \otimes D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] & D \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dazu sei $f := (f_C \otimes f_D)\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow C \otimes D$. Dieses ist ein Koalgebren Homomorphismus, weil in einer kokommmutativen Koalgebra A die Komultiplikation $\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$ ein Koalgebren Homomorphismus ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

kommutiert nämlich. Außerdem erhält Δ die Koeins der Koalgebra

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "\cong"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}. \end{tikzcd}$$

Es gelten nun $\pi_C f = (1_C \otimes \varepsilon_D)(f_C \otimes f_D)\Delta_A = (f_C \otimes \varepsilon_D f_D)\Delta_A = (f_C \otimes \varepsilon_A)\Delta_A = (f_C \otimes 1_{\mathbb{K}})(1_A \otimes \varepsilon_A)\Delta_A = f_C$. Sei ein weiterer Algebren Homomorphismus $g : A \longrightarrow C \otimes D$ mit $\pi_C g = f_C$ und $\pi_D g = f_D$ gegeben. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[r, "\Delta_C \otimes \Delta_D"] \arrow[ddr, "1_C \otimes 1_D"'] & C \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[r, "1_C \otimes \tau \otimes 1_D"] \arrow[d, "1_C \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes 1_D"] & C \otimes D \otimes C \otimes D \arrow[d, "p_C \otimes p_D"] \\
 & C \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes D \arrow[r, "1_C \otimes \tau \otimes 1_D"] \arrow[d, "\cong"] & C \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes D \arrow[dl, "\cong"] \\
 & C \otimes D &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, ist $g = (p_C \otimes p_D)(1_C \otimes \tau \otimes 1_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D) g = (p_C \otimes p_D)\Delta_{C \otimes D} g = (p_C \otimes p_D)(g \otimes g)\Delta_A = (p_C g \otimes p_D g)\Delta_A = (f_C \otimes f_D)\Delta_A = f$. Damit ist nachgewiesen, daß $(C \otimes D, (\pi_C, \pi_D))$ ein Produkt von C und D in der Kategorie $\mathbb{K}$- Koalg_c der kokommutativen Koalgebren ist. $\square$

Der Beweis zeigt, daß es günstiger ist, Beweise wenn möglich elementfrei nur durch Rückgriff auf Morphismen zu führen, da sie dann eine Dualisierung zulassen. Der zweite Teil des oben gegebenen Beweises ließe sich tatsächlich dualisieren, um auch den ersten Teil des Beweises zu geben. Dazu müßten wir jedoch den Begriff eines Tensorprodukts in einer beliebigen Kategorie einführen. Das wird später geschehen.
Wir formulieren ein weiteres Lemma ohne den trivialen Beweis.

Lemma 6.2. *1) In der Kategorie der kommutativen Algebren ist $\mathbb{K}$ ein Anfangsobjekt.*
2) In der Kategorie der kokommutativen Koalgebren ist $\mathbb{K}$ ein Endobjekt.

Definition 6.3. Ein Objekt G in einer Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einer (kontravarianten) Faktorisierung $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ des darstellbaren kontravarianten Funktors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, G) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ durch den Vergißfunktor $\mathcal{V} : \mathrm{Gr} \longrightarrow \mathrm{Me}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, G) = \mathcal{V}\mathcal{G}$ heißt eine *Gruppe* in der Kategorie $\mathcal{C}$.
Ein Objekt G in einer Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einer (kovarianten) Faktorisierung $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ des darstellbaren kovarianten Funktors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G, \text{-}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Me}$ durch den Vergißfunktor $\mathcal{V} : \mathrm{Gr} \longrightarrow \mathrm{Me}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G, \text{-}) = \mathcal{V}\mathcal{G}$ heißt eine *Kogruppe* in der Kategorie $\mathcal{C}$.

Übung 6.4. 1) Zeigen Sie, daß Gruppen in der Kategorie der Mengen genau die abstrakten Gruppen sind.
2) Finden Sie alle Kogruppen in der Kategorie der Mengen.

Im folgenden Satz verwenden wir die Morphismen $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ in ein Produkt in einer Kategorie $\mathcal{C}$ definiert durch die Komponenten $1_X : X \longrightarrow X$ und $1_X : X \longrightarrow X$ und den eindeutig bestimmten Morphismus $\varepsilon : X \longrightarrow E$ in ein Endobjekt einer Kategorie.

Satz 6.5. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Produkten (und Endobjekt E). Sei G ein Objekt in $\mathcal{C}$. Es gibt eine Bijektion zwischen den Faktorisierungen $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow$* Gr, *so daß $(G, \mathcal{G})$ eine Gruppe in $\mathcal{C}$ wird, und den Tripeln von Morphismen in $\mathcal{C}$:*

$$\nabla : G \times G \longrightarrow G, \quad \eta : E \longrightarrow G, \quad s : G \longrightarrow G,$$

so daß die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\nabla \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times \nabla"'] & G \times G \arrow[d, "\nabla"] \\
G \times G \arrow[r, "\nabla"'] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E \times G \cong G \cong G \times E \arrow[r, "\mathrm{id} \times \eta"] \arrow[d, "\eta \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "1_G"] & G \times G \arrow[d, "\nabla"] \\
G \times G \arrow[r, "\nabla"'] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & E \arrow[r, "\eta"] & G \\
G \times G \arrow[rr, "S \times 1_G"] & & G \times G \arrow[u, "\nabla"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & E \arrow[r, "\eta"] & G \\
G \times G \arrow[rr, "1_G \times S"] & & G \times G. \arrow[u, "\nabla"']
\end{tikzcd}$$

Beweis. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, G)$ läßt sich durch die Kategorie der Gruppen genau dann faktorisieren, wenn für jedes $X \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G)$ eine Gruppe ist und für jeden Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ die Abbildung $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, G) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, G) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G)$ ein Gruppen Homomorphismus ist. Damit haben wir insbesondere Abbildungen

$$\begin{aligned}
\nabla_X : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G), \\
\eta_X : \{*\} &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G) \\
s_X : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G),
\end{aligned}$$

die die Gruppenaxiome erfüllen und mit den Abbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, G)$ verträglich sind:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G) \arrow[r, "\nabla_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G) \arrow[r, "\nabla_X"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)"] \\
\{*\} \arrow[r, "\eta"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,G) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G)"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G) \arrow[r, "s"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G).
\end{tikzcd}$$

Da darstellbare kovariante Funktoren Produkte (und Endobjekte) erhalten, haben wir insbesondere natürliche Transformationen $\mathrm{Mor}_C(X, G \times G) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G)$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,E) \cong \{*\} \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,G)$, die zusammen mit s nach dem Yoneda Lemma Morphismen $\nabla_G : G \times G \longrightarrow G$, $\eta_G : E \longrightarrow G$ und $s_G : G \longrightarrow G$ induzieren. Die Diagramme für die Gruppenaxiome der Funktoren $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, G \times G)$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, G)$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, E)$ induzieren nach dem Yoneda Lemma kommutative Diagramme wie im Satz und umgekehrt. □

Satz 6.6. *Die Gruppen in* $\mathbb{K}$- Koalg_c *sind genau die kokommutativen Hopf-Algebren. Die Kogruppen in* $\mathbb{K}$- Alg_c *sind genau die kommutativen Hopf-Algebren.*

Beweis. Nach Lemma 6.1 und 6.2 gibt es in $\mathbb{K}$- Koalg_c Produkte und ein Endobjekt. Gruppen können daher durch die Morphismen und Diagramme aus dem vorangehenden Satz beschrieben werden. Dabei sind die Produkte durch Tensorprodukte zu ersetzen. Analoges gilt für die duale Kategorie von $\mathbb{K}$- Alg_c. □

Mit diesem Satz ist zweierlei ausgesagt. Erstens definiert jede kommutative Hopf Algebra H einen Funktor $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(H, \text{-}) : \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$, der durch die Kategorie der Gruppen faktorisierbar ist, oder wie wir kurz schreiben einen Funktor $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(H, \text{-}) : \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Gr}$. Zweitens wird jeder darstellbare Funktor $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(H, \text{-}) : \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Me}$, der durch die Kategorie der

Gruppen faktorisierbar ist, von einer Hopf Algebra H dargestellt. Analoges gilt für die Kategorie der kokommutativen Koalgebren.

Definition 6.7. 1) Die durch kommutative (endlich erzeugte) Hopf Algebren dargestellten kovarianten Funktoren von $\mathbb{K}$- Alg_c in die Kategorie der Gruppen heißen *affine algebraische Gruppen*.
2) Die durch kokommutative Hopf Algebren dargestellten kontravarianten Funktoren von $\mathbb{K}$- Koalg_c in die Kategorie der Gruppen heißen *formale Gruppen*.

Beispiel 6.8. 1) Die affine algebraische Gruppe, genannt additive Gruppe,

$$G_a : \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

mit $G_a(A) := A^+$ aus Lemma 3.1 wird durch die Hopf Algebra $\mathbb{K}[x]$ dargestellt. Wir bestimmen dazu die Komultiplikation, Koeinheit und Antipode. Die Komultiplikation entsteht mit dem Yoneda Lemma aus der Multiplikation $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x], A) \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A) \times \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A) \cong A \times A \longrightarrow A \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A)$ durch Auswertung auf $A \cong \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x]$ und Anwendung auf die Identität. Wir erhalten $1_{\mathbb{K}[x]\otimes\mathbb{K}[x]} \mapsto (\iota_1, \iota_2) \mapsto (x \otimes 1, 1 \otimes x) \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x \mapsto \Delta_{\mathbb{K}[x]}$, also ist $\Delta_{\mathbb{K}[x]} : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x]$ durch $\Delta_{\mathbb{K}[x]}(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ definiert.
Die Koeinheit ergibt sich aus $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}, A) \cong \{*\} \longrightarrow A \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}(\mathbb{K}[x], A)$ mit $A \cong \mathbb{K}$ durch $1_{\mathbb{K}} \mapsto * \mapsto 0 \mapsto \varepsilon_{\mathbb{K}[x]}$. Also ist $\varepsilon_{\mathbb{K}[x]}(x) = 0$.
Die Antipode entsteht aus $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A) \cong A \longrightarrow A \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x], A)$ durch $A = \mathbb{K}[x]$ und $1_{\mathbb{K}[x]} \mapsto x \mapsto -x \mapsto S_{\mathbb{K}[x]}$, also $S_{\mathbb{K}[x]}(x) = -x$.
2) Der Funktor

$$M_n^+ : \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c \longrightarrow \mathrm{Ab},$$

der jeder kommutativen Algebra A die additive Gruppe der Matrizenalgebra $M_n(A)$ zuordnet, wird durch die kommutative Algebra $\mathbb{K}[x_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$ dargestellt (vgl. 3.5). Diese Algebra muß eine Hopf Algebra sein.
Die Komultiplikation ist mit dem Yoneda Lemma aus der Multiplikation (Addition von Matrizen) $\mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x_{ij}] \otimes \mathbb{K}[x_{ij}], A) \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x_{ij}], A) \times \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x_{ij}], A) \cong M_n(A) \times M_n(A) \longrightarrow M_n(A) \cong \mathbb{K}\text{- }\mathrm{Alg}_c(\mathbb{K}[x_{ij}], A)$ zu erhalten. Durch Auswertung auf $A \cong \mathbb{K}[x_{ij}] \otimes \mathbb{K}[x_{ij}]$ und Anwendung auf die Identität erhalten wir $1_{\mathbb{K}[x_{ij}]\otimes\mathbb{K}[x_{ij}]} \mapsto (\iota_1, \iota_2) \mapsto ((x_{ij}) \otimes 1, 1 \otimes (x_{ij})) \mapsto (x_{ij} \otimes 1) + (1 \otimes x_{ij}) \mapsto \Delta_{\mathbb{K}[x_{ij}]}$. Also ist $\Delta_{\mathbb{K}[x_{ij}]} : \mathbb{K}[x_{ij}] \longrightarrow \mathbb{K}[x_{ij}] \otimes \mathbb{K}[x_{ij}]$ durch $\Delta_{\mathbb{K}[x_{ij}]}(x_{ij}) = x_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes x_{ij}$ definiert.

Die Koeinheit ergibt sich als $\varepsilon_{\mathbb{K}[x_{ij}]}(x_{ij}) = 0$. Die Antipode ist $S_{\mathbb{K}[x_{ij}]}(x_{ij}) = -x_{ij}$.
3) Der Matrizenring $M_n(A)$ besitzt auch eine nicht-kommutative Multiplikation, mit der ein Monoid definiert wird

$$M_n^\times : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \text{Mon}\,.$$

Daher wird $\mathbb{K}[x_{ij}]$ mit einer weiteren Komultiplikation auch zu einer Bialgebra (die Antipode fehlt natürlich).
Diese weitere Komultiplikation entsteht aus $1_{\mathbb{K}[x_{ij}]\otimes\mathbb{K}[x_{ij}]} \mapsto (\iota_1, \iota_2) \mapsto ((x_{ij}) \otimes 1, 1 \otimes (x_{ij})) \mapsto (x_{ij} \otimes 1) \cdot (1 \otimes x_{ij}) = (\sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj}) \mapsto \Delta_{\mathbb{K}[x_{ij}]}$.
Also ist

$$\Delta_{\mathbb{K}[x_{ij}]}(x_{ik}) = \sum_{j=1}^n x_{ij} \otimes x_{jk}\,.$$

Die Koeinheit ist $\varepsilon_{\mathbb{K}[x_{ij}]}(x_{ij}) = \delta_{ij}$.
4) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik p. Die Algebra $H = \mathbb{K}[x]/(x^p)$ trägt die Struktur einer Hopf Algebra durch $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$ und $S(x) = -x$. Um zu zeigen, daß Δ wohldefiniert ist, müssen wir $\Delta(x)^p = 0$ nachweisen. Das ist aber klar wegen der Potenzrechenregeln in Charakteristik p: $(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p = 0$.
Die Algebra H stellt somit eine affine algebraische Gruppe dar:

$$\alpha_p(A) := \mathbb{K}\text{- Alg}_c(H, A) \cong \{a \in A | a^p = 0\}.$$

Die Gruppenmultiplikation ist die Addition der p-nilpotenten Elemente. So haben wir die *Gruppe der p-nilpotenten Elemente* erhalten.
5) Die Algebra $H = \mathbb{K}[x]/(x^n - 1)$ ist eine Hopf Algebra durch die Komultiplikation $\Delta(x) = x \otimes x$, die Koeinheit $\varepsilon(x) = 1$ und die Antipode $S(x) = x^{n-1}$. Die Abbildungen sind wohldefiniert, weil z.B. $\Delta(x)^p = (x \otimes x)^p = x^p \otimes x^p = 1 \otimes 1$ gilt.
Die durch die Hopf Algebra H dargestellte affine algebraische Gruppe ist

$$\mu_n(A) := \mathbb{K}\text{- Alg}_c(H, A) \cong \{a \in A | a^n = 1\},$$

also die *Gruppe der n-ten Einheitswurzeln*. Die Gruppen Multiplikation ist die gewöhnliche Multiplikation von Einheitswurzeln.

Übung 6.9. a) Beschreiben Sie die Hopf Algebra zur multiplikativen Gruppe G_m (3.3).

b) Die Konstruktion der allgemeinen linearen Gruppe

$$GL_n(A) = \{(a_{ij}) \in M_n(A) | (a_{ij}) \text{ invertierbar}\}$$

definiert eine affine algebraische Gruppe. Beschreiben Sie die zugehörige Hopf Algebra.
c) Die spezielle lineare Gruppe $SL_n(A)$ ist ebenfalls eine affine algebraische Gruppe. Welches ist die zugehörige Hopf Algebra?
d)* Der Einheitskreis $S^1(\mathbb{R})$ trägt durch die Winkeladdition eine Gruppenstruktur. Können Sie S^1 mit der affinen Algebra $\mathbb{K}[c,s]/(c^2+s^2-1)$ zu einer affinen algebraischen Gruppe machen? (Hinweis: Wie kann man zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Kreislinie addieren, so daß sich die Addition der zugehörigen Winkel ergibt?)

KAPITEL VII

Nichtkommutative Räume und Quantengruppen

Jetzt endlich kommen wir zu den nichtkommutativen geometrischen Räumen und ihren Funktionenalgebren. Vieles, was wir in den Grundbegriffen der kommutativen algebraischen Geometrie gemacht haben, läßt sich mit leichter Modifikation auch hier noch verwenden. Die Hilfsmittel sind jetzt auch stark genug, um Monoide, die auf nichtkommutativen geometrischen Räumen operieren, zu studieren. Damit wir der Begriff der Symmetrie für solche Räume eingeführt. Genauer liegen die Symmetrien in Quantengruppen, die wir jedoch hier nur streifen können.

Definition 7.1. Sei A eine (nicht notwendig kommutative) Algebra. Dann heißt der durch A dargestellte Funktor $\mathcal{X} := \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(A, \text{-}) : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg} \longrightarrow$ Me ein *affines nichtkommutatives Schema, ein (affiner) nichtkommutativer Raum* oder ein *Quantenraum*. Die Elemente von $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(A, B)$ heißen B-Punkte von $\mathcal{X}$. Ein Morphismus von nichtkommutativen Räumen $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ist eine natürliche Transformation.

Bemerkung 7.2. Die nichtkommutativen Räume bilden eine Kategorie QR, die zu der Kategorie der $\mathbb{K}$-Algebren dual ist. Daher nennt man häufig auch die Kategorie $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}^{op}$ die Kategorie der nichtkommutativen Räume.
Ist A eine endlich erzeugte Algebra, so kann sie als Restklassenalgebra $A \cong \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$ einer Polynomalgebra in nicht-kommutierenden Variablen (vgl. 6) dargestellt werden. Ist $I = (p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, \ldots, x_n))$ das von den Polynomen $p_1, \ldots, p_m$ erzeugte zweiseitige Ideal, so können die Mengen $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}(A, B)$ als Nullstellen-Mannigfaltigkeiten in B^n aufgefaßt

werden. Es ist nämlich $\mathbb{K}\text{- Alg}(\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n\rangle, B) \cong \text{Abb}(\{x_1, \dots, x_n\}, B) = B^n$ und $\mathbb{K}\text{- Alg}(A, B)$ kann als die Menge derjenigen Algebrenhomomorphismen von $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ nach B aufgefaßt werden, die auf den Polynomen $p_1, \dots, p_m$ verschwinden und damit auch auf ganz I verschwinden, als als die Nullstellen dieser Polynome im B^n.
Ebenso wie in Satz 4.13 zeigt man, daß auch im nicht-kommutativen Fall die Morphismen zwischen nichtkommutativen Räumen durch Familien von Polynomen beschrieben werden.
Auch Satz 4.10 über die Operation der affinen Algebra $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$ auf $\mathcal{X}$ als Funktionenalgebra kann unmittelbar auf den nicht-kommutativen Fall übertragen werden: die in B natürliche Transformation $\psi(B) : A \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow B$ ist durch $\psi(B)(a, f) := f(a)$ gegeben und kommt von dem Isomorphismus $A \cong \text{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V})$.

Wir holen jetzt eine Aussage über die Funktionen Algebra A nach, die wir im kommutativen Fall nicht bewiesen haben, die dort aber ebenfalls gilt.

Lemma 7.3. *Sei D eine Algebra und $\varphi : D \times \mathcal{X}(\text{-}) \longrightarrow \mathcal{V}(\text{-})$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es genau einen Algebren Homomorphismus $f : D \longrightarrow A$, so daß das Diagram*

$$\begin{tikzcd} D \times \mathcal{X}(B) \arrow[d, "f\times 1"'] \arrow[dr, "\varphi(B)"] & \\ A \times \mathcal{X}(B) \arrow[r, "\psi(B)"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die natürliche Transformation $\varphi : D \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}$ induziert eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : D \longrightarrow \text{Nat}(\mathcal{X}, \mathcal{V}) \cong A$ mit $\varphi(B)(d, g) = f(d)(B)(g) = \psi(B)(f(d), g) = \psi(B)(f \times 1)(g)$. $\square$

Definition 7.4. Der nichtkommutative Raum $A_q^{2|0}$ mit der Funktionenalgebra

$$\mathcal{O}(A_q^{2|0}) := \mathbb{K}\langle x, y\rangle/(xy - q^{-1}yx)$$

mit $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ heißt *(deformierte) Quanten-Ebene.* Der nichtkommutative Raum $A_q^{0|2}$ mit der Funktionenalgebra

$$\mathcal{O}(A_q^{0|2}) := \mathbb{K}\langle \xi, \eta\rangle/(\xi^2, \eta^2, \xi\eta + q\eta\xi)$$

heißt *duale (deformierte) Quanten-Ebene*. Es ist

$$A_q^{2|0}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \big| x, y \in A; xy = q^{-1}yx \right\}$$

und

$$A_q^{0|2}(A) = \left\{ (\xi, \quad \eta) \big| \xi, \eta \in A; \xi^2 = 0, \eta^2 = 0, \xi\eta = -q\eta\xi \right\}.$$

Definition 7.5. Sei $\mathcal{X}$ ein nichtkommutativer Raum mit der Funktionenalgebra A und sei $\mathcal{X}_c$ die Einschränkung des Funktors $\mathcal{X} : \mathbb{K}\text{- Alg} \longrightarrow \text{Me}$ auf die Kategorie der kommutativen Algebren: $\mathcal{X}_c : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \text{Me}$. Dann heißt $\mathcal{X}_c$ der *kommutative Anteil* des nichtkommutativen Raumes $\mathcal{X}$.

Lemma 7.6. *Der kommutative Anteil $\mathcal{X}_c$ eines nichtkommutativen Raumes ist ein affines Schema.*

Beweis. Der Vergißfunktor $\mathcal{V} : \mathbb{K}\text{- Alg}_c \longrightarrow \mathbb{K}\text{- Alg}$ besitzt den linksadjungierten Funktor $\mathbb{K}\text{- Alg} \ni A \mapsto A/[A,A] \in \mathbb{K}\text{- Alg}$, wobei $[A,A]$ das zweiseitige Ideal von A ist, das von den Elementen $ab-ba$ aufgespannt wird. Zu jedem Algebren Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ in eine kommutative Algebra B gibt es nämlich genau eine Faktorisierung durch $A/[A,A]$, weil f auf den Elementen $ab - ba$ verschwindet.
Wenn also $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$ die Funktionenalgebra von $\mathcal{X}$ ist, dann ist $A/[A,A]$ die darstellende Algebra für $\mathcal{X}_c$. □

Bemerkung 7.7. Die Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}_c$ haben in kommutativen (Koeffizienten-) Algebren B dieselben Punkte: $\mathcal{X}(B) = \mathcal{X}_c(B)$, sie unterscheiden sich nur in nicht-kommutativen Koeffizienten-Bereichen. Insbesondere besitzt die Quantenebene $A_q^{2|0}$ mit $q \neq 1$ in kommutativen Körpern B als Koeffizientenbereich nur B-Punkte auf den Achsen, denn $\mathbb{K}\langle x,y\rangle/(xy - q^{-1}yx, xy-yx) \cong k[x,y]/(xy)$ definiert nur Punkte (b_1, b_2) in B^2, bei denen mindestens ein Faktor Null ist.

Zur Rolle der nicht-kommutativen Hopf Algebren müssen wir das Tensorprodukt in $\mathbb{K}\text{- Alg}$ besser verstehen.

Definition 7.8. Seien $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$ und $A' = \mathcal{O}(\mathcal{Y})$ Funktionenalgebren der nichtkommutativen Räume $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Zwei B-Punkte $p : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{X}(B)$ und $p' : A' \longrightarrow B$ in $\mathcal{Y}(B)$ heißen *kommutierend*, wenn für alle $a \in A$ und alle $a' \in A'$ gilt

$$p(a)p'(a') = p'(a')p(a),$$

d.h. wenn wenn die Bilder der Homomorphismen p und p' kommutieren.

Bemerkung 7.9. Es genügt zu überprüfen, daß die Bilder der Algebra Erzeugenden $p(x_1), \ldots, p(x_m)$ mit den Bildern der Algebra Erzeugenden $p'(y_1), \ldots, p'(y_n)$ bei der Multiplikation kommutieren, um zu zeigen, daß die Punkte p und p' kommutieren, also daß für die B-Punkte $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathcal{X}(B)$ und $(b'_1, \ldots, b'_n) \in \mathcal{Y}(B)$ gilt:

$$b_i b'_j = b'_j b_i.$$

Definition 7.10. Der Funktor

$$(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B) := \{(p, p') \in \mathcal{X}(B) \times \mathcal{Y}(B) | p, p' \text{ kommutieren}\}$$

heißt *orthogonales Produkt* der nichtkommutativen Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

Bemerkung 7.11. Tatsächlich ist $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ wieder ein Funktor, weil Homomorphismen $f : B \longrightarrow B'$ kommutierende Punkte erhalten, denn sie sind mit der Multiplikation verträglich. Damit ist $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ ein Unterfunktor von $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Lemma 7.12. *Wenn $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ nichtkommutative Räume sind, dann ist auch $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ ein nichtkommutativer Raum mit der Funktionenalgebra $\mathcal{O}(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}) = \mathcal{O}(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{Y})$.*
Wenn $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ endlich erzeugte Funktionen Algebren besitzen, also algebraisch sind, dann gilt das auch für $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$.

Beweis. Seien $(p, p') \in (\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B)$ ein Paar kommutierender Punkte. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Algebren Homomorphismus $h : A \otimes A' \longrightarrow B$, so daß das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "p"'] & A \otimes A' \arrow[d, "h"] & A' \arrow[l, "\iota'"'] \arrow[dl, "p'"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Man definiere nämlich $h(a \otimes a') := f(a)g(a')$ und rechne damit die erforderlichen Eigenschaften nach. Man beachte, daß bei einem beliebigen Algebren Homomorphismus $h : A \otimes A' \longrightarrow B$ die Bilder von Elementen $a \otimes 1$ und $1 \otimes a'$ kommutieren, weil sie schon in $A \otimes A'$ selbst kommutieren. Damit ist aber

$$(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B) \cong \mathbb{K}\text{- Alg}(A \otimes A', B).$$

Wenn jetzt A von den Elementen $a_1, \dots, a_m$ und A' von den Elementen $a'_1, \dots, a'_n$ als Algebren erzeugt werden, dann wird $A \otimes A'$ von den Elementen $a_i \otimes 1$ und $1 \otimes a'_j$ erzeugt. $\square$

Satz 7.13. *Sei H eine Bialgebra mit zugeordnetem nichtkommutativen Raum $\mathcal{X}$. Dann definieren die Komultiplikation und Koeinheit von H Abbildungen*

$$m : \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \text{ und } e : E \longrightarrow \mathcal{X},$$

so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "m \perp 1"] \arrow[d, "1 \perp m"'] & \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} E \perp \mathcal{X} \cong \mathcal{X} \cong \mathcal{X} \perp E \arrow[r, "\mathrm{id} \perp \eta"] \arrow[d, "\eta \perp \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "1_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "\nabla"] \\ \mathcal{X} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "\nabla"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis. Der Funktor E sei der durch $\mathbb{K}$ dargestellte Funktor, der jeder Algebra A die einelementige Menge $\{\iota : \mathbb{K} \longrightarrow A\}$ zuordnet. Da die Funktoren $\mathcal{X} \perp \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \perp E$ und $E \perp \mathcal{X}$ durch $A \otimes A$ bzw. $A \otimes \mathbb{K} \cong A$ bzw. $\mathbb{K} \otimes A \cong A$ dargestellt werden können, ergeben sich die Diagramme mit dem Yoneda Lemma unmittelbar aus der Definition einer Bialgebra. $\square$

Ein ähnliches Resultat für Hopf Algebren ist nicht formulierbar, weil weder die Antipode S einer Hopf Algebra H noch die Multiplikation $\nabla : H \otimes H \longrightarrow H$ ein Algebren Homomorphismus ist. Im Gegensatz zu den affinen algebraischen Gruppen sind also Hopf Algebren in der Kategorie $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}^{op} \cong QR$ keine Gruppen. Dennoch definiert man

Definition 7.14. Ein durch eine Bialgebra B dargestellter Funktor auf der Kategorie der $\mathbb{K}$-Algebren heißt *Quantenmonoid.* Ein durch eine Hopf Algebra H dargestellter Funktor auf der Kategorie der $\mathbb{K}$-Algebren heißt *Quantengruppe.*

Definition 7.15. Sei $\mathcal{X}$ ein nichtkommutativer Raum und $\mathcal{M}$ ein Quantenmonoid. Ein (natürlicher) Morphismus $\rho : \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ heißt *Operation* von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{X}$, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "m\perp 1"] \arrow[d, "1\perp\rho"'] & \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \cong E \perp \mathcal{X} \arrow[r, "\eta\perp\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{X}}"'] & \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "\rho"] \\ & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

kommutieren. Wir nennen dann $\mathcal{X}$ auch einen (nichtkommutativen) $\mathcal{M}$-*Raum.*

Satz 7.16. *Sei $\mathcal{X}$ ein nichtkommutativer Raum mit der Funktionen Algebra $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$ und $\mathcal{M}$ ein Quantenmonoid mit der Funktionen Algebra $B = \mathcal{O}(\mathcal{M})$. Dann sind für einen (natürlichen) Morphismus $\rho : \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ mit zugehörigem Algebren Homomorphismus $f : A \longrightarrow B \otimes A$ äquivalent:*
a) ρ definiert eine Operation von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{X}$,
b) die folgenden Diagramme in $\mathbb{K}$- Alg *sind kommutativ*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes 1_A"] \\ B \otimes A \arrow[r, "1_B\otimes f"'] & B \otimes B \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1_A"] \\ & A \cong \mathbb{K} \otimes A. \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Algebren Homomorphismen $\Delta \otimes 1_A$, $1_B \otimes f$, $\varepsilon \otimes 1_A$ etc. stellen die natürlichen Transformationen $m \perp \mathrm{id}$, $\mathrm{id} \perp \rho$, $\eta \perp \mathrm{id}$ etc. dar. Also übertragen sich die Diagramme einfach nach dem Yoneda Lemma. □

Definition 7.17. Eine Algebra A zusammen mit einer Bialgebra B und einem Algebren Homomorphismus, der zu kommutativen Diagrammen wie im Satz führt, heißt eine *B-Komodul Algebra.*

Beispiel 7.18. 1) Sei $B = \mathbb{K}\langle a,b,c,d\rangle/I$ gegeben, so daß I als zweiseitiges Ideal durch die Elemente

$$ab - q^{-1}ba, ac - q^{-1}ca, bd - q^{-1}db, cd - q^{-1}dc, ad - da - (q^{-1} - q)bc, bc - cb$$

erzeugt wird. Die Algebra B wird zu einer Bialgebra durch die Diagonale

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

d.h. durch $\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c$, $\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d$, $\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c$ und $\Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d$.
Diese merkwürdige Multiplikation versteht man am besten durch Verwendung der kommutierenden Punkte $\iota_1 : B \ni b \longrightarrow b \otimes 1 \in B \otimes B$ und $\iota_2 : B \ni b \longrightarrow 1 \otimes b \in B \otimes B$ und Bildung von deren Produkt

$$\begin{aligned} (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes 1) \cdot (1 \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} a \otimes 1 & b \otimes 1 \\ c \otimes 1 & d \otimes 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \otimes a & 1 \otimes b \\ 1 \otimes c & 1 \otimes d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes d \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes b + d \otimes d \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Produkt ist ein $B \otimes B$-Punkt von $\mathrm{Spec}(B)$. Man muß natürlich nachrechnen, daß die gegebene Definition der Abbildung Δ auf den Erzeugenden a, b, c, d mit den Relationen aus I verträglich ist, daß also $\Delta(a)\Delta(b) - q^{-1}\Delta(b)\Delta(a) = 0$ etc. in $B \otimes B$ gilt. Dann ist $\Delta : B \longrightarrow B \otimes B$ wohldefinierter Algebren Homomorphismus.
Weiter ist Δ koassoziativ, weil die Multiplikation assoziativ ist

$$\begin{aligned} &\left[(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes 1)\right] \cdot (1 \otimes 1 \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \\ &= (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes 1) \cdot \left[(1 \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes 1) \cdot (1 \otimes 1 \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})\right]. \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, daß $\varepsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Koeinheit für die Bialgebra B ist.
Damit definiert B ein Quantenmonoid $\mathcal{M}_q(2)$ mit

$$\mathcal{M}_q(2)(A') = \left\{ \begin{pmatrix} u & x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| u, x, y, z \in A'; ux = q^{-1}xu, \dots, xy = yx \right\},$$

die deformierte Version von $M_2^\times$, dem multiplikativen Monoid der 2×2-Matrizen.

2) Sei $A = \mathbb{K}\langle x,y\rangle/(xy - q^{-1}yx)$ die Funktionen Algebra der Quantenebene $A_q^{2|0}$. Nach Definition 7.4 ist

$$A_q^{2|0}(A') = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \big| x, y \in A'; xy = q^{-1}yx \right\}.$$

Die Menge

$$\mathcal{M}_q(2)(A') = \left\{ \begin{pmatrix} u & x \\ y & z \end{pmatrix} \big| u, x, y, z \in A'; ux = q^{-1}xu, \ldots, xy = yx \right\}$$

operiert auf dieser Quantenebene durch Matrizenmultiplikation:

$$\mathcal{M}_q(2)(A') \perp A_q^{2|0}(A') \ni (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A_q^{2|0}(A').$$

Auch hier muß nachgeprüft werden, ob das Ergebnis die gewünschten Gleichungen erfüllt. Da wir eine Multiplikation von Matrizen vorliegen haben, ist damit eine Operation im Sinne des vorhergehenden Satzes gegeben. Insbesondere ist dann A eine B-Komodul Algebra.
3) Sei $A = \mathbb{K}\langle \xi, \eta\rangle/(\xi^2, \eta^2, \xi\eta + q\eta\xi)$ die Funktionen Algebra der dualen Quantenebene $A_q^{0|2}$. Nach Definition 7.4 ist

$$A_q^{0|2}(A') = \left\{ (\xi \quad \eta) \big| \xi, \eta \in A; \xi\eta = q^{-1}\eta\xi \right\}.$$

Auch hierauf operiert B durch Matrizenmultiplikation

$$A_q^{0|2}(A') \perp \mathcal{M}_q(2)(A') \ni ((\xi \quad \eta), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \mapsto (\xi \quad \eta) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_q^{0|2}(A').$$

Damit ist ein weiteres Beispiel einer B-Komodul Algebra $A \longrightarrow A \otimes B$ gegeben.

Welche Bewandtnis hat es jetzt mit den merkwürdigen Relationen auf $\mathcal{M}_q(2)$ auf sich? Wir werden später zeigen, daß $M_q(2)$ die universelle Bialgebra ist, die auf $A_q^{2|0}$ von links und auf $A_q^{0|2}$ von rechts operiert, dies jedoch in der Kategorie der sogenannten quadratischen Algebren. Hier zeigen wir einen einfacheren Satz für endlich-dimensionale Algebren.

Übung 7.19. Bestimmen Sie die Q-Punkte der Quantenebene $A_q^{2|0}$, wobei Q die $\mathbb{R}$-Algebra der Quaternionen sei.

Satz 7.20. (Tambara) *Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Dann gibt es eine Algebra $M(A)$ und einen Algebren Homomorphismus $\delta : A \longrightarrow M(A) \otimes A$, so daß für jede Algebra B und jeden Algebren Homomorphismus $f : A \longrightarrow B \otimes A$ genau ein Algebren Homomorphismus $g : M(A) \longrightarrow B$ so existiert, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "g \otimes 1_A"] \\ & B \otimes A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Wir geben die Algebra explizit an. Zunächst stellen wir fest, daß $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ nach Übung 1.13 eine Koalgebra mit den Strukturmorphismen $\Delta : A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$ ist. Die duale Basis sei $\sum_{i=1}^n a_i \otimes \bar{a}^i \in A \otimes A^*$. Sei jetzt $T(A \otimes A^*)$ die Tensor Algebra über dem Vektorraum $A \otimes A^*$. In ihr betrachten wir Elemente

$$\begin{aligned} & xy \otimes \zeta \in A \otimes A^*, \\ & x \otimes y \otimes \Delta(\zeta) \in A \otimes A \otimes A^* \otimes A^* \cong A \otimes A^* \otimes A \otimes A^*, \\ & 1 \otimes \zeta \in A \otimes A^*, \\ & \zeta(1) \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Die Elemente

$$xy \otimes \zeta - x \otimes y \otimes \Delta(\zeta) \tag{8}$$

und

$$1 \otimes \zeta - \zeta(1) \tag{9}$$

erzeugen ein zweiseitiges Ideal $I \in T(A \otimes A^*)$. Wir definieren jetzt

$$M(A) := T(A \otimes A^*)/I$$

und die Kooperation $\delta : A \ni a \longrightarrow \sum_{i=1}^n (a \otimes \bar{a}^i) \otimes a_i \in T(A \otimes A^*)/I \otimes A$. Diese lineare Abbildung ist wohldefiniert.
Um zu zeigen, daß dies ein Algebren Homomorphismus ist, werden wir zunächst die Multiplikation auf A beschreiben durch $a_i a_j = \sum_k \alpha_{ij}^k a_k$. Dann ist die Komultiplikation auf A^* gegeben durch $\Delta(\bar{a}^k) = \sum_{ij} \alpha_{ij}^k \bar{a}^i \otimes \bar{a}^j$, denn es ist $(\Delta(\bar{a}^k), a_l \otimes a_m) = (\bar{a}^k, a_l a_m) = \sum_r \alpha_{lm}^r (\bar{a}^k, a_r) = \alpha_{lm}^k = \sum_{ij} \alpha_{ij}^k (\bar{a}^i, a_l)(\bar{a}^j, a_m) = (\sum_{ij} \alpha_{ij}^k \bar{a}^i \otimes \bar{a}^j, a_l \otimes a_m)$. Weiter sei $1 = \sum \beta^k a_k$.

Dann ist $\varepsilon(\bar{a}^i) = \beta^i$, denn es ist $\varepsilon(\bar{a}^i) = (\bar{a}^i, 1) = \sum_j \beta^j(\bar{a}^i, a_j) = \beta^i$. Damit ergibt sich $\delta(a)\delta(b) = (\sum_{i=1}^n (a\otimes\bar{a}^i)\otimes a_i)\cdot(\sum_{j=1}^n (b\otimes\bar{a}^j)\otimes a_j) = \sum_{ij}(a\otimes b\otimes \bar{a}^i\otimes\bar{a}^j)\otimes a_i a_j = \sum_{ijk}\alpha_{ij}^k(a\otimes b\otimes\bar{a}^i\otimes\bar{a}^j)\otimes a_k = \sum_k(a\otimes b\otimes\Delta(\bar{a}^k))\otimes a_k = \sum_k(ab\otimes\bar{a}^k)\otimes a_k = \delta(ab)$. Weiter ist $\delta(1) = \sum_i(1\otimes\bar{a}^i)\otimes a_i = \sum_i \bar{a}^i(1)\otimes a_i = 1\otimes\sum_i \bar{a}^i(1)a_i = 1\otimes 1$. Damit ist δ ein Algebren Homomorphismus.

Wir müssen jetzt zeigen, daß zu jedem f genau ein g gehört. Zunächst induziert $f : A \longrightarrow B\otimes A$ eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $f_i : A \longrightarrow B$ mit $f(a) = \sum_i f_i(a)\otimes a_i$, weil die a_i eine Basis bilden. Da f ein Algebren Homomorphismus ist, erhalten wir aus $\sum_k f_k(a)\otimes a_k = f(ab) = f(a)f(b) = \sum_{ij}(f_i(a)\otimes a_i)(f_j(b)\otimes a_j) = \sum_{ij} f_i(a)f_j(b)\otimes a_i a_j = \sum_{ijk}\alpha_{ij}^k f_i(a)f_j(b)\otimes a_k$ durch Koeffizientenvergleich

$$f_k(ab) = \sum_{ij}\alpha_{ij}^k f_i(a)f_j(b).$$

Weiter definieren wir $g(a\otimes\bar{a}) := (1\otimes\bar{a})f(a)\in B$. Insbesondere gilt dann $g(a\otimes\bar{a}^i) = (1\otimes\bar{a}^i)(\sum_j f_j(a)\otimes a_j) = f_i(a)$. Die Abbildung g kann unmittelbar als Algebren Homomorphismus, ebenfalls mit g bezeichnet, auf die Algebra $T(A\otimes A^*)$ fortgesetzt werden. Für die Erzeugenden des Ideals erhalten wir $g(ab\otimes\bar{a}^k - a\otimes b\otimes\Delta(\bar{a}^k)) = (1\otimes\bar{a}^k)\sum_l f_l(ab)\otimes a_l - \sum_{rsij}\alpha_{ij}^k(1\otimes \bar{a}^i)(f_r(a)\otimes a_r)\cdot(1\otimes\bar{a}^j)(f_s(b)\otimes a_s) = f_k(ab) - \sum_{ij}\alpha_{ij}^k f_i(a)f_j(b) = 0$. Weiter ist $g(1\otimes\zeta - \zeta(1)) = (1\otimes\zeta)f(1) - \zeta(1) = (1\otimes\zeta)(1\otimes 1) - \zeta(1) = 1\zeta(1) - \zeta(1) = 0$. Damit verschwindet g auf dem Ideal I und läßt sich durch $M(A) = T(A)/I$ faktorisieren. Mit dieser Abbildung, ebenfalls mit g bezeichnet, kommutiert des Diagramm, denn $(g\otimes 1_A)\delta(a) = (g\otimes 1_A)(\sum_i(a\otimes\bar{a}^i)\otimes a_i) = \sum_i(1\otimes\bar{a}^i)f(a)\otimes a_i = \sum_{ij} f_j(a)(\bar{a}^i, a_j)\otimes a_i = \sum_i f_i(a)\otimes a_i = f(a)$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von g zu zeigen. Gelte also $(h\otimes 1_A)\delta = f$. Dann ist $\sum_i h(a\otimes\bar{a}^i)\otimes a_i = (h\otimes 1_A)\delta(a) = f(a) = \sum_i f_i(a)\otimes a_i$, also $h(a\otimes\bar{a}^i) = f_i(a) = g(a\otimes\bar{a}^i)$, d.h. $g = h$. $\square$

Folgerung 7.21. *Sei A eine endlich-dimensionale Algebra mit universeller Algebra $M(A)$ und $\delta : A \longrightarrow M(A)\otimes A$. Dann ist $M(A)$ eine Bialgebra und A durch δ eine $M(A)$-Komodul Algebra.*

Wenn auch B eine Bialgebra ist und $f : A \longrightarrow B\otimes A$ auf A eine B-Komodul Algebra definiert, dann gibt es genau einen Bialgebren Homomorphismus $g : M(A) \longrightarrow B$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "g \otimes 1_A"] \\ & B \otimes A \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes 1_A"] \\ M(A) \otimes A \arrow[r, "1_{M(A)} \otimes \delta"'] & M(A) \otimes M(A) \otimes A, \end{tikzcd}$$

in dem der Morphismus Δ durch die universelle Eigenschaft von $M(A)$ bezüglich des Algebren Homomorphismus $(1_{M(A)} \otimes \delta)\delta$ definiert ist. Insbesondere ist Δ ein Algebren Homomorphismus. Weiter existiert ein eindeutig bestimmter Algebren Homomorphismus $\varepsilon : M(A) \longrightarrow \mathbb{K}$, so daß

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "1_A"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "\varepsilon \otimes 1_A"] \\ & A \cong \mathbb{K} \otimes A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die Koalgebren Axiome ergeben sich aus den folgenden kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & M(A) \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes 1_A"] \\ M(A) \otimes A \arrow[r, "1_{M(A)} \otimes \delta"] \arrow[d, shift right, "\Delta \otimes 1_A"'] \arrow[d, shift left, "1_{M(A)} \otimes \delta"] & M(A) \otimes M(A) \otimes A \arrow[d, shift right, "\Delta \otimes 1_{M(A)} \otimes 1_A"'] \arrow[d, shift left, "1_{M(A)} \otimes \Delta \otimes 1_A"] \\ M(A) \otimes M(A) \otimes A \arrow[r, "1_{M(A)} \otimes 1_{M(A)} \otimes \delta"] & M(A) \otimes M(A) \otimes M(A) \otimes A \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M(A)\otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes 1_A"'] \arrow[dd, bend left=60, "1_{M(A)}\otimes 1_A"] \\
M(A)\otimes A \arrow[r, "1_{M(A)}\otimes\delta"] \arrow[dr, "1_{M(A)}\otimes 1_A"'] & M(A)\otimes M(A)\otimes A \arrow[d, "1_{M(A)}\otimes\varepsilon\otimes 1_A"'] \\
 & M(A)\otimes A \cong M(A)\otimes\mathbb{K}\otimes A
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dd, bend right=60, "1_A"'] & M(A)\otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes 1_A"] \\
M(A)\otimes A \arrow[r, "1_{M(A)}\otimes\delta"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1_A"] & M(A)\otimes M(A)\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1_{M(A)}\otimes 1_A"] \\
A \arrow[r, "\delta"] & M(A)\otimes A \cong \mathbb{K}\otimes M(A)\otimes A.
\end{tikzcd}$$

Aus diesen folgt nämlich $(\Delta\otimes 1_{M(A)})\Delta = (1_{M(A)}\otimes\Delta)\Delta$, $(1_{M(A)}\otimes\varepsilon)\Delta = 1_{M(A)}$ und $\varepsilon\otimes(1_{M(A)})\Delta = 1_{M(A)}$. Schließlich ist A nach Definition von Δ und ε eine $M(A)$-Komodul Algebra.

Sei nun aus durch $f : A \longrightarrow B\otimes A$ eine B-Komodul Algebra definiert. Dann gibt es genau einen Algebren Homomorphismus $g : M(A) \longrightarrow B$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & M(A)\otimes A \arrow[d, "g\otimes 1_A"] \\
 & B\otimes A
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & M(A)\otimes A \arrow[r, shift left, "\Delta\otimes 1_A"] \arrow[r, shift right, "1_{M(A)}\otimes\delta"'] \arrow[d, "g\otimes 1_A"] & M(A)\otimes M(A)\otimes A \arrow[d, "g\otimes g\otimes 1_A"] \\
 & B\otimes A \arrow[r, shift left, "\Delta_B\otimes 1_A"] \arrow[r, shift right, "1_B\otimes f"'] & B\otimes B\otimes A
\end{tikzcd}$$

folgt $((g\otimes g)\Delta\otimes 1_A)\delta = (g\otimes g\otimes 1_A)(\Delta\otimes 1_A)\delta = (g\otimes g\otimes 1_A)(1_{M(A)}\otimes\delta)\delta = (g\otimes(g\otimes 1_A)\delta)\delta = (1_B\otimes(g\otimes 1_A)\delta)(g\otimes 1_A)\delta = (1_B\otimes f)f = (\Delta_B\otimes 1_A)f = (\Delta_B\otimes 1_A)(g\otimes 1_A)\delta = (\Delta_B g\otimes 1_A)\delta$, also $(g\otimes g)\Delta = \Delta_B g$. Weiter folgt aus

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[ddr, "1_A"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "g \otimes 1_A"'] \arrow[dd, bend left, "\varepsilon \otimes 1_A"] \\
& B \otimes A \arrow[d, "\varepsilon_B \otimes 1_A"'] \\
& A \cong \mathbb{K} \otimes A
\end{tikzcd}$$

die Gleichung $\varepsilon_B g = \varepsilon$. Damit ist g ein Bialgebren Homomorphismus. $\square$

Definition 7.22. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Die Bialgebra $M(A)$, die auf A universell kooperiert, heißt die *Koendomorphismen Bialgebra* von A.

Übung 7.23. a) Bestimmen Sie vollständig die duale Koalgebra A^* zu $A := \mathbb{K}\langle x\rangle/(x^2)$. (Hinweis: Bestimmen Sie eine Basis von A.)
b) Bestimmen Sie möglichst explizit die Koendomorphismen Bialgebra von A aus dem Teil a) der Übung. (Bestimmen Sie zunächst eine Algebra Erzeugendenmenge für $M(A)$. Geben Sie dann die Relationen an.)
c) Bestimmen Sie vollständig die duale Koalgebra A^* zu $A := \mathbb{K}\langle x\rangle/(x^3)$.
d) Bestimmen Sie möglichst explizit die Koendomorphismen Bialgebra von A aus dem Teil c) der Übung.
e)* Bestimmen Sie vollständig die duale Koalgebra A^* zu $A := \mathbb{K}\langle x, y\rangle/I$, wobei das Ideal I als zweiseitiges Ideal erzeugt werde durch die Polynome

$$xy - q^{-1}yx, x^2, y^2.$$

f)* Bestimmen Sie möglichst explizit die Koendomorphismen Bialgebra von A aus dem Teil e) der Übung.
h) Sei A eine endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Algebra mit universeller Bialgebra $A \longrightarrow B \otimes A$. Zeigen Sie,

i) daß auch $A^{op} \longrightarrow B^{op} \otimes A^{op}$ universell ist (wobei A^{op} die Multiplikation $\nabla\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow A$ trägt);
ii) daß $A \cong A^{op}$ impliziert $B \cong B^{op}$ (als Bialgebren);
iii) daß für kommutative A gilt $B \cong B^{op}$, daß B jedoch nicht notwendig kommutativ ist.
iv) Geben Sie einen Isomorphismus $B \cong B^{op}$ an für die Bialgebra $B = \mathbb{K}\langle a, b\rangle/(a^2, ab + ba)$. (Vgl. b))

Lösungshinweise: 1/2) Die Bialgebra hat die Form $B = \mathbb{K}\langle a, b\rangle/(a^2, ab+ba)$ Δ mit $\Delta(a) = a \otimes 1 + b \otimes a$, $\Delta(b) = b \otimes b$ und $\varepsilon(a) = 0$, $\varepsilon(b) = 1$. Die Kooperation ist $\delta(x) = a \otimes 1 + b \otimes x$.

3/4) A hat die Basis $1, x, x^2$. Die duale Koalgebra hat die duale Basis e, ζ, ζ_2 mit $\Delta(e) = e \otimes e$, $\Delta(\zeta) = \zeta \otimes e + e \otimes \zeta$ und $\Delta(\zeta_2) = \zeta_2 \otimes e + \zeta \otimes \zeta + e \otimes \zeta_2$. Die universelle Bialgebra $B = T(A \otimes A^*)/I$ erfüllt $\delta(x) = x \otimes e \otimes 1 + x \otimes \zeta \otimes x + x \otimes \zeta_2 \otimes x^2 = a \otimes 1 + b \otimes x + c \otimes x^2$. Sie wird daher von den Elementen $a = x \otimes e$, $b = x \otimes \zeta$ und $c = x \otimes \zeta_2$ erzeugt. Die Multiplikationstafel und die Relationen ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
&1 \otimes e = 1,\\
&1 \otimes \zeta = 1 \otimes \zeta_2 = 0,\\
&x^2 \otimes e = (x \otimes e)(x \otimes e),\\
&x^2 \otimes \zeta = (x \otimes \zeta)(x \otimes e) + (x \otimes e)(x \otimes \zeta),\\
&x^2 \otimes \zeta_2 = (x \otimes \zeta_2)(x \otimes e) + (x \otimes \zeta)(x \otimes \zeta) + (x \otimes e)(x \otimes \zeta_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 = x^3 \otimes e = (x^2 \otimes e)(x \otimes e),\\
&0 = x^3 \otimes \zeta = (x^2 \otimes \zeta)(x \otimes e) + (x^2 \otimes e)(x \otimes \zeta),\\
&0 = x^3 \otimes \zeta_2 = (x^2 \otimes \zeta_2)(x \otimes e) + (x^2 \otimes \zeta)(x \otimes \zeta) + (x^2 \otimes e)(x \otimes \zeta_2)
\end{aligned}$$

und sind mit der Abkürzung $\{u, v\} := u^2v + uvu + vu^2$

$$\begin{aligned}
&a^3 = 0,\\
&\{a, b\} = 0,\\
&\{a, c\} + \{b, a\} = 0.
\end{aligned}$$

Durch die Bedingung $(1 \otimes \delta)\delta = (\Delta \otimes 1)\delta$ erhält man

$$\begin{aligned}
&\Delta(a) = a \otimes 1 + b \otimes a + c \otimes a^2,\\
&\Delta(b) = b \otimes b + c \otimes (ba + ab),\\
&\Delta(c) = b \otimes c + c \otimes b^2 + c \otimes (ca + ac),\\
&\varepsilon(a) = 0,\\
&\varepsilon(b) = 1,\\
&\varepsilon(c) = 0.
\end{aligned}$$

5/6) A hat die Basis $1, x, y, xy$. Die duale Basis von A^* sei e, ξ, η, θ. Die Diagonal-Abbildung ist

$$\begin{aligned}
&\Delta(e) = e \otimes e,\\
&\Delta(\xi) = \xi \otimes e + e \otimes \xi,\\
&\Delta(\eta) = \eta \otimes e + e \otimes \eta,\\
&\Delta(\theta) = \theta \otimes e + e \otimes \theta + \xi \otimes \eta + q\eta \otimes \xi.
\end{aligned}$$

Damit hat die Koendomorphismen Bialgebra die Algebren Erzeugenden $a \otimes \zeta$ mit $a \in \{1, x, y, xy\}$ und $\zeta \in \{e, \xi, \eta, \theta\}$. Die Erzeugenden der Relationen (von I) sind durch die Gleichungen 8 und 9 gegeben. Diese implizieren, daß $1 \otimes e$ das Einselement ist, daß $1 \otimes \xi = 1 \otimes \eta = 1 \otimes \theta = 0$ und daß

$$\begin{aligned}
&ab \otimes e = (a \otimes e)(b \otimes e),\\
&ab \otimes \xi = (a \otimes \xi)(b \otimes e) + (a \otimes 1)(b \otimes \xi),\\
&ab \otimes \eta = (a \otimes \eta)(b \otimes e) + (a \otimes 1)(b \otimes \eta),\\
&ab \otimes \theta = (a \otimes \theta)(b \otimes e) + (a \otimes 1)(b \otimes \theta) + (a \otimes \xi)(b \otimes \eta) + q(a \otimes \eta)(b \otimes \xi).
\end{aligned}$$

Weiter sind für ab die Gleichungen in A zu berücksichtigen.
Wenn wir definieren

$$\begin{aligned}
&a := x \otimes e, \quad b := x \otimes \xi, \quad c := x \otimes \eta, \quad d := x \otimes \theta,\\
&e := y \otimes e, \quad f := y \otimes \xi, \quad g := y \otimes \eta, \quad h := x \otimes \theta,
\end{aligned}$$

dann gelten $\delta(x) = a \otimes 1 + b \otimes x + c \otimes y + d \otimes xy$ und $\delta(y) = e \otimes 1 + f \otimes x + g \otimes y + h \otimes xy$. Also wird B von den $a, \dots, h$ als Algebra erzeugt. Die Relationen sind dann

$$\begin{aligned}
&a^2 = e^2 = 0,\\
&ab + ba = ac + ca = ef + fe = eg + ge = 0,\\
&ad + da + bc + qcb = eh + he + fg + qgf = 0,\\
&ae = qea,\\
&af + be = q(fa + eb),\\
&ag + ce = q(ga + ec),\\
&ah - qha + de - qed + bg - q^2 gb + qcf - qfc = 0.
\end{aligned}$$

Weiter ist die Diagonale

$$\begin{aligned}
&\Delta(a) = a \otimes 1 + b \otimes a + c \otimes e + d \otimes ae,\\
&\Delta(b) = b \otimes b + c \otimes f + d \otimes (af + be),\\
&\Delta(c) = b \otimes c + c \otimes g + d \otimes (ag + ce),\\
&\Delta(d) = b \otimes d + c \otimes h + d \otimes (ah + de + bg + q^{-1} cf) \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

KAPITEL VIII

Monoidale Kategorien

Für weitere Untersuchungen ist es günstig, eine verallgemeinerte Version des Tensorproduktes zu kennen. Diese soll in diesem Kapitel eingeführt werden. Sie ermöglicht es unter anderem auch, über den geeigneten Begriff einer Darstellung zu sprechen.

Definition 8.1. Eine *monoidale Kategorie* (oder *Tensor-Kategorie*) besteht aus
einer Kategorie $\mathcal{C}$,
einem Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, genannt *Tensor Produkt*,
einem Objekt $I \in \mathcal{C}$, genannt *Einheit*,
natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned}
&\alpha(A,B,C) : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C),\\
&\lambda(A) : I \otimes A \longrightarrow A,\\
&\rho(A) : A \otimes I \longrightarrow A,
\end{aligned}$$

genannt *Assoziativität, Links-Einheit* und *Rechts-Einheit*, so daß folgende Diagramme, genannt *Kohärenzdiagramme* oder *Constraints*, kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha(A,B,C)\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha(A\otimes B,C,D)"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha(A,B\otimes C,D)"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "1\otimes\alpha(B,C,D)"'] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha(A,B,C\otimes D)"] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha(A,I,B)"] \arrow[dr, "\rho(A)\otimes 1"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1\otimes\lambda(B)"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Eine monoidale Kategorie heißt *strikt*, wenn die Morphismen α, λ, ρ Identitäten sind.

Bemerkung 8.2. Wir definieren $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n := (\ldots(A_1 \otimes A_2) \otimes \ldots) \otimes A_n$. Der Kohärenzsatz von MacLane besagt, daß alle Diagramme, deren Morphismen unter Verwendung von α, λ, ρ, Identitäten, Inversen, Tensorprodukten und Verknüpfungen gebildet sind, kommutieren. Wir werden diesen Satz nicht beweisen. Aus ihm folgt, daß jede monoidale Kategorie ersetzt werden kann (monoidal äquivalent ist) durch eine strikte monoidale Kategorie, daß heißt, daß man in Diagrammen die Morphismen α, λ, ρ fortlassen kann, d.h. durch Identitäten ersetzen kann. Insbesondere gibt es auf $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ nur einen mit den Kohärenzmorphismen gebideten Automorphismus, nämlich die Identität.

Bemerkung 8.3. Zu jeder monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ kann man eine dazu symmetrische monoidale Kategorie $\mathcal{C}^{symm}$ bilden, die als Kategorie mit $\mathcal{C}$ übereinstimmt, die das Tensorprodukt $A \boxtimes B := B \otimes A$ hat und die Kohärenzmorphismen

$$\begin{aligned}
&\alpha(C, B, A)^{-1} : (A \boxtimes B) \boxtimes C \longrightarrow A \boxtimes (B \boxtimes C),\\
&\rho(A) : I \boxtimes A \longrightarrow A,\\
&\lambda(A) : A \boxtimes I \longrightarrow A.
\end{aligned}$$

Dann sind wiederum die Kohärenzdiagramme kommutativ. Damit wird $\mathcal{C}^{symm}$ eine monoidale Kategorie.

Beispiel 8.4. a) Sei R ein beliebiger Ring. Die Kategorie ${}_R\mathcal{M}_R$ der R-R-Bimoduln mit dem Tensorprodukt $M \otimes_R N$ ist eine monoidale Kategorie. Insbesondere bilden die $\mathbb{K}$-Moduln eine monoidale Kategorie.
b) Sei B eine Bialgebra und $\mathcal{M}_B$ die Kategorie der B-Rechts-Moduln. Wir definieren auf dem Tensorprodukt $M \otimes N = M \otimes_{\mathbb{K}} N$ die Struktur eines B-Rechts-Moduls durch

$$M \otimes N \otimes B \xrightarrow{1_M \otimes 1_N \otimes \Delta} M \otimes N \otimes B \otimes B \xrightarrow{1_M \otimes \tau \otimes 1_B} \mathcal{M} \otimes B \otimes N \otimes B \xrightarrow{\rho_M \otimes \rho_N} M \otimes N.$$

Man verifiziert leicht, daß dieses eine Modulstruktur ergibt und daß damit $\mathcal{M}_B$ eine monoidale Kategorie wird.

c) Sei B eine Bialgebra und $\mathcal{M}^B$ die Kategorie der B-Rechts-Komoduln. Wir definieren auf dem Tensorprodukt $M \otimes N = M \otimes_{\mathbb{K}} N$ die Struktur eines B-Rechts-Komoduls durch

$$M \otimes N \xrightarrow{\delta_M \otimes \delta_N} M \otimes B \otimes N \otimes B \xrightarrow{1_M \otimes \tau \otimes 1_B} M \otimes N \otimes B \otimes B \xrightarrow{1_M \otimes 1_N \otimes \nabla} M \otimes N \otimes B.$$

Man verifiziert leicht, daß dieses eine Komodulstruktur ergibt und daß damit $\mathcal{M}^B$ eine monoidale Kategorie wird.

d) Sei G ein Monoid. Ein Vektorraum V zusammen mit einer Familie von Untervektorräumen $(V_g | g \in G)$ heißt *G-graduiert*, wenn gilt $V = \oplus_{g \in G} V_g$.
Seien V und W G-graduierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt G-graduiert, wenn für alle $g \in G$ gilt $f(V_g) \subseteq W_g$.
Die G-graduierten Vektorräume und linearen Abbildungen bilden die Kategorie $\mathcal{M}^G$ der *G-graduierten Vektorräume*.
Auf $\mathcal{M}^G$ ist eine monoidale Struktur durch das Tensorprodukt $V \otimes W$ und die Unterräume $(V \otimes W)_g := \sum_{h \in G} V_h \otimes W_{h^{-1}g} = \sum_{h,k \in G, hk=g} V_h \otimes W_k$ definiert.
Die Kategorie $\mathcal{M}^G$ ist äquivalent zur Kategorie der $\mathbb{K}G$-Komoduln $\mathcal{M}^{\mathbb{K}G}$ unter der folgenden Zuordnung. Einem G-graduierten Vektorraum V ordnet man den $\mathbb{K}G$-Komodul V mit der Strukturabbildung $\delta : V \longrightarrow V \otimes \mathbb{K}G$, $\delta(v) := v \otimes g$ für alle $v \in V_g$ und für alle $g \in G$ zu. Ist umgekehrt $V, \delta : V \longrightarrow V \otimes \mathbb{K}G$ ein $\mathbb{K}G$-Komodul, so ordnet man diesem den Vektorraum V mit den graduierten (homogenen) Komponenten $V_g := \{v \in V | \delta(v) = v \otimes g$. Man rechnet nach, daß dieses eine Kategorienäquivalenz ist.
Da $\mathbb{K}G$ eine Bialgebra ist, ist die Kategorie der $\mathbb{K}G$-Komoduln nach Teil b) eine monoidale Kategorie. Man rechnet nach, daß bei der Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}^G$ und $\mathcal{M}^{\mathbb{K}G}$ Tensorprodukte in entsprechende Tensorprodukte abgebildet werden, daß also eine monoidale Äquivalenz vorliegt.

e) Ein *(Ketten-)Komplex von R-Moduln* über einem Ring R

$$M = (\ldots \xrightarrow{\partial_3} M_2 \xrightarrow{\partial_2} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0)$$

besteht aus einer Familie von R-Moduln M_i und einer Familie von Homomorphismen $\partial_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$ mit $\partial_{n-1}\partial_n = 0$. (Dieser Ketten-Komplex ist mit $\mathbb{N}_0$ indiziert. Man betrachtet auch Ketten-Komplexe, die mit $\mathbb{Z}$ indiziert sind.
Seien M und N zwei Ketten-Komplexe. Ein *Homomorphismus $f : M \longrightarrow N$ von Ketten-Komplexen* besteht aus einer Familie von Homomorphismen von

R-Moduln $f_n : M_n \longrightarrow N_n$, so daß gelten $f_n \partial_{n+1} = \partial_{n+1} f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Die Ketten-Komplexe von R-Moduln mit diesen Homomorphismen bilden die Kategorie Komp-R der Ketten-Komplexe.
Die Bialgebra aus Übung 7.23 2) ist $B = \mathbb{K}\langle x, y\rangle / I$, wobei I erzeugt wird von $x^2, xy + yx$. Die Diagonale ist $\Delta(y) = y \otimes y$, $\Delta(x) = x \otimes y + 1 \otimes x$ und die Koeinheit ist $\varepsilon(y) = 1, \varepsilon(x) = 0$.
Die Kategorie Komp-$\mathbb{K}$ der Ketten-Komplexe über $\mathbb{K}$ ist äquivalent zur Kategorie der B-Komoduln $\mathcal{M}^B$ unter der folgenden Zuordnung. Einem Kettenkomplex M ordnet man den B-Komodul $M = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ zu mit der Strukturabbildung $\delta : M \longrightarrow M \otimes B$, $\delta(m) := \sum m \otimes y^i + \partial_i(m) \otimes xy^{i-1}$ für alle $m \in M_i$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ bzw. $\delta(m) := m \otimes 1$ für $m \in M_0$. Ist umgekehrt $M, \delta : M \longrightarrow M \otimes B$ ein B-Komodul, so ordnet man diesem die Vektorräume $M_i := \{m \in M | \exists m' \in M[\delta(m) = m \otimes y^i + m' \otimes xy^{i-1}\}$ und die linearen Abbildungen $\partial_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ mit $\partial_i(m) := m'$ für $\delta(m) = m \otimes y^i + m' \otimes xy^{i-1}$ zu. Man rechnet nach, daß dieses eine Kategorienäquivalenz ist.

Übung 8.5. 1) Beweisen Sie ausführlich, daß $\mathcal{M}^G$ und $\mathcal{M}^{\mathbb{K}G}$ als monoidale Kategorien äquivalent sind.
2) Beweisen Sie ausführlich, daß Komp-$\mathbb{K}$ und $\mathcal{M}^B$ mit B wie im vorausgehenden Beispiel e) äquivalente Kategorien sind. Da $\mathcal{M}^B$ eine monoidale Kategorie ist, überträgt sich das Tensorprodukt auch auf Komp-$\mathbb{K}$. Wie sieht dieses in Komp-B aus?
3) Ein Koketten-Komplex über $\mathbb{K}$ hat die Form

$$M = (M_0 \xrightarrow{\partial_0} M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_2 \xrightarrow{\partial_2} \ldots)$$

mit $\partial_{i+1}\partial_i = 0$. Zeigen Sie, daß die Kategorie $\mathbb{K}$-Kokomp der Koketten-Komplexe äquivalent zu ${}^B\mathcal{M}$ ist, wobei B wie in Beispiel e) gewählt ist.

Lemma 8.6. *Die folgenden Diagramme kommutieren in einer monoidalen Kategorie*

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda(A) \otimes 1_B"'] & & I \otimes (A \otimes B) \arrow[dl, "\lambda(A \otimes B)"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho(A \otimes B)"'] & & A \otimes (B \otimes I) \arrow[dl, "1_A \otimes \rho(B)"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

und es ist $\lambda(I) = \rho(I)$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß der Identitätsfunktor $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und der Funktor $I \otimes$ - durch den natürlichen Isomorphismus λ isomorph sind. Insbesondere gilt daher $I \otimes f = I \otimes g \Longrightarrow f = g$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
((I \otimes I) \otimes A) \otimes B \arrow[rr, "\alpha \otimes 1"] \arrow[dr, "(\rho \otimes 1) \otimes 1"] \arrow[ddd, "\alpha"'] & & (I \otimes (I \otimes A)) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "(1 \otimes \lambda) \otimes 1"] & & I \otimes ((I \otimes A) \otimes B) \arrow[dl, "1 \otimes (\lambda \otimes 1)"'] \arrow[ddd, "1 \otimes \alpha"] \\
& (I \otimes A) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & & I \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "1"'] & \\
& I \otimes (A \otimes B) \arrow[rr, "1"] & & I \otimes (A \otimes B) \arrow[dr, "1 \otimes \lambda"'] & \\
(I \otimes I) \otimes (A \otimes B) \arrow[ur, "\rho \otimes (1 \otimes 1)"] \arrow[rrrr, "\alpha"] & & & & I \otimes (I \otimes (A \otimes B))
\end{tikzcd}$$

kommutieren alle Teildiagramme, bis auf das rechte Trapez. Da die Morphismen aber Isomorphismen sind, kommutiert auch das rechte Trapex, also auch das behauptete Diagramm.
Die Kommutativität des zweiten Diagramms ergibt sich durch analoge Schlüsse.
Weiterhin kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \otimes (I \otimes I) \arrow[dr, "1 \otimes \rho"'] & & (I \otimes I) \otimes I \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dr, "\rho \otimes 1"'] & & I \otimes (I \otimes I) \arrow[dl, "1 \otimes \lambda"] \\
& I \otimes I \arrow[dr, "\rho"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\rho"] & \\
& & I & &
\end{tikzcd}$$

Dabei kommutiert das linke Dreieck wegen der zuvor gezeigten Eigenschaft, das rechte Dreieck ist durch Axiom gegeben. Schließlich kommutiert das untere Quadrat, weil ρ eine natürliche Transformation ist. Insbesondere ist daher $\rho(1 \otimes \rho) = \rho(1 \otimes \lambda)$. Da ρ ein Isomorphismus ist und $I \otimes \text{-} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gilt, folgt $\rho = \lambda$. $\square$

Übung 8.7. Für Morphismen $f : I \longrightarrow M$ und $g : I \longrightarrow N$ in einer monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ definieren wir $(f \otimes 1 : N \longrightarrow M \otimes N) := (f \otimes$

$1_I)\rho(I)^{-1}$ und $(1 \otimes g : M \longrightarrow M \otimes N) := (1 \otimes g)\lambda(I)^{-1}$. Zeigen Sie, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "1\otimes g"] \\ N \arrow[r, "f\otimes 1"'] & M \otimes N \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 8.8. Seien $(\mathcal{C}, \otimes)$ und $(\mathcal{D}, \otimes)$ monoidale Kategorien. Ein Funktor

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\xi(M, N) : \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N) \longrightarrow \mathcal{F}(M \otimes N)$$

und einem Morphismus

$$\xi_0 : I_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{F}(I_{\mathcal{C}})$$

heißt *schwach monoidal*, wenn die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)) \otimes \mathcal{F}(P) \arrow[r, "\xi\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{F}(M \otimes N) \otimes \mathcal{F}(P) \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{F}((M \otimes N) \otimes P) \arrow[d, "\mathcal{F}(\alpha)"] \\ \mathcal{F}(M) \otimes (\mathcal{F}(N) \otimes \mathcal{F}(P)) \arrow[r, "1\otimes\xi"] & \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N \otimes P) \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{F}(M \otimes (N \otimes P)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \otimes \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\xi_0\otimes 1"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(\lambda)"'] & \mathcal{F}(I) \otimes \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{F}(I \otimes M) \arrow[dl, "\lambda"] \\ & \mathcal{F}(M) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \otimes I \arrow[r, "1\otimes\xi_0"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(\rho)"'] & \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(I) \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{F}(M \otimes I) \arrow[dl, "\rho"] \\ & \mathcal{F}(M). & \end{tikzcd}$$

Wenn zusätzlich ξ und ξ_0 Isomorphismen sind, dann heißt der Funktor *monoidal*. Der Funktor heißt *strikt monoidal*, wenn ξ und ξ_0 Identitäts-Morphismen sind.

Eine natürliche Transformation $\zeta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ zwischen schwach monoidalen Funktoren heißt *monoidal*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\zeta"'] & \mathcal{F}(M \otimes N) \arrow[d, "\zeta\otimes\zeta"] \\
\mathcal{F}'(M) \otimes \mathcal{F}'(N) \arrow[r, "\xi'"'] & \mathcal{F}'(M \otimes N)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(I) \arrow[dd, "\zeta"] \\
I \arrow[ur, "\xi_0"] \arrow[dr, "\xi_0'"'] & \\
 & \mathcal{F}'(I)
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

In monoidalen Kategorien kann man Begriffe wie Algebra und Koalgebra verallgemeinern. Wir definieren dazu

Definition 8.9. Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale Kategorie. Eine *Algebra* oder ein *Monoid* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt A zusammen mit einer Multiplikation $\nabla : A \otimes A \longrightarrow A$, die assoziativ ist:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\nabla"] \arrow[d, "\nabla\otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\nabla"'] & A
\end{tikzcd}$$

und einem Einselement $\eta : I \longrightarrow A$, für das kommutiert

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \cong A \cong A \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta"] \arrow[d, "\eta\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\nabla"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Seien A und B Algebren in $\mathcal{C}$. Ein *Algebren-Morphismus* $f : A \longrightarrow B$ ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so daß kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\nabla_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\nabla_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 8.10. Offenbar ist die Komposition von zwei Algebren-Morphismen wieder ein solcher. Ebenso ist der identische Morphismus ein Algebren-Morphismus. Damit erhalten wir die Kategorie $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ der Algebren in $\mathcal{C}$.

Definition 8.11. Eine *Koalgebra* oder ein *Komonoid* in einer monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt C zusammen mit einer Komultiplikation $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, die koassoziativ ist:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

und einem Koeinselement $\varepsilon : C \longrightarrow I$, für das kommutiert

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & I \otimes C \cong C \cong C \otimes I. \end{tikzcd}$$

Seien C und D Koalgebren. Ein *Koalgebren-Morphismus* $f : C \longrightarrow D$ ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so daß kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{C}}"'] & D \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{D}}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathcal{C}}"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathcal{D}}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 8.12. Offenbar ist die Komposition von zwei Koalgebren-Morphismen wieder ein solcher. Ebenso ist der identische Morphismus ein Koalgebren-Morphismus. Damit erhalten wir die Kategorie $\mathrm{Koalg}(\mathcal{C})$ der Koalgebren in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 8.13. Die Begriffe der Bialgebra, Hopf-Algebra und Komodul-Algebra können wir nicht ohne weiteres verallgemeinern, da dazu auf dem

Tensorprodukt von zwei Algebren wieder eine Multiplikation definiert sein muß, wozu eine Vertauschung der Tensor Faktoren benötigt wird. Solche Vertauschungen sind unter dem Namen einer Symmetrie oder Quasisymmetrie bekannt und werden in einem späteren Kapitel besprochen.

KAPITEL IX

Duale Objekte

Die Existenz dualer Darstellungen bedeutet eine gewisse Endlichkeit von gegebenen Darstellungen. Sie entspricht der Bildung dualer Vektorräume von endlich dimensionalen Vektorräumen. Da wir nun ein allgemeineres Tensorprodukt besitzen, müssen wir diesen Begriff im Rahmen des neuen Tensorproduktes genauer untersuchen.

DEFINITION 9.1. Sei $(\mathcal{C}, \otimes)$ eine monoidale Kategorie und $M \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Ein Objekt $M^* \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus $\mathrm{ev} : M^* \otimes M \longrightarrow I$ heißt ein *Links-Dual* für M, wenn es einen Morphismus $\mathrm{db} : I \longrightarrow M \otimes M^*$ in $\mathcal{C}$ so gibt, daß

$$(M \xrightarrow{\mathrm{db} \otimes 1} M \otimes M^* \otimes M \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{ev}} M) = 1_M$$
$$(M^* \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{db}} M^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes 1} M^*) = 1_{M^*}.$$

Eine monoidale Kategorie heißt *links starr*, wenn jedes Objekt $M \in \mathcal{C}$ ein Links-Dual besitzt.
Symmetrisch definieren wir wie folgt: ein Objekt ${}^*M \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus $\mathrm{ev} : M \otimes {}^*M \longrightarrow I$ heißt ein *Rechts-Dual* für M, wenn es einen Morphismus $\mathrm{db} : I \longrightarrow {}^*M \otimes M$ in $\mathcal{C}$ so gibt, daß

$$(M \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{db}} M \otimes {}^*M \otimes M \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes 1} M) = 1_M$$
$$({}^*M \xrightarrow{\mathrm{db} \otimes 1} {}^*M \otimes M \otimes {}^*M \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{ev}} {}^*M) = 1_{{}^*M}.$$

Eine monoidale Kategorie heißt *rechts starr*, wenn jedes Objekt $M \in \mathcal{C}$ ein Rechts-Dual besitzt.

Bemerkung 9.2. Wenn $(M^*, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ ein Links-Dual zu M ist, dann ist offenbar $(M, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ ein Rechts-Dual zu M^*.

Lemma 9.3. *Sei $(M^*, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ ein Links-Dual zu M. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-} \otimes M, \text{-}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, \text{-} \otimes M^*),$$

d.h. der Funktor $\text{-} \otimes M : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist linksadjungiert zum Funktor $\text{-} \otimes M^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Beweis. Wir geben die Einheit und die Koeinheit an. Dazu definieren wir $\Phi(A) := 1_A \otimes \mathrm{db} : A \longrightarrow A \otimes M \otimes M^*$ und $\Psi(B) := 1_B \otimes \mathrm{ev} : B \otimes M^* \otimes M \longrightarrow B$. Offenbar sind dieses natürliche Transformationen. Da

$$(A \otimes M \xrightarrow[1_A \otimes \mathrm{db} \otimes 1_M]{\mathcal{F}\Phi(A)=} A \otimes M \otimes M^* \otimes M \xrightarrow[1_A \otimes 1_M \otimes \mathrm{ev}]{\Psi\mathcal{F}(A)=} A \otimes M) = 1_{A \otimes M}$$

und

$$(B \otimes M^* \xrightarrow[1_B \otimes 1_{M^*} \otimes \mathrm{db}]{\Phi\mathcal{G}(B)=} B \otimes M^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow[1_B \otimes \mathrm{ev} \otimes 1_{M^*}]{\mathcal{G}\Psi(B)=} B \otimes M^*) = 1_{B \otimes M^*}$$

gelten, ist das Lemma durch Folgerung 3.17 bewiesen.

Es gilt aber auch die Umkehrung. Wenn $\text{-} \otimes M$ linksadjungiert zu $\text{-} \otimes M^*$ ist, dann ergeben die Einheit Φ einen Morphismus $\mathrm{db} := \Phi(I) : I \longrightarrow M \otimes M^*$ und die Koeinheit Ψ einen Morphismus $\mathrm{ev} := \Psi(I) : M^* \otimes M \longrightarrow I$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Folgerung 9.4. *Wenn $\text{-} \otimes M : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ linksadjungiert zu $\text{-} \otimes M^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist, dann ist M^* ein Links-Dual zu M.*

Folgerung 9.5. *Wenn M ein Links-Dual besitzt, dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $(M^*, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ und $(M^!, \mathrm{db}^!, \mathrm{ev}^!)$ Links-Duale zu M. Dann sind die Funktoren $\text{-} \otimes M^*$ und $\text{-} \otimes M^!$ nach Lemma 3.13 isomorph. Insbesondere gilt $M^* \cong I \otimes M^* \cong I \otimes M^! \cong M^!$. Wenn man die Konstruktion des Isomorphismus genau verfolgt, so ergibt sich sogar, daß $(\mathrm{ev}^! \otimes 1)(1 \otimes \mathrm{db}) : M^! \longrightarrow M^! \otimes M \otimes M^* \longrightarrow M^*$ der gegebene Isomorphismus ist. □

Folgerung 9.6. *Sei* $(M^*, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ *ein Links-Dual zu* M*. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M^* \otimes \text{-}, \text{-}) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, M \otimes \text{-}),$$

d.h. der Funktor $M^* \otimes \text{-} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *ist linksadjungiert zum Funktor* $M \otimes \text{-} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Beweis. Wir hatten bemerkt, daß $(M, \mathrm{ev}, \mathrm{db})$ ein Rechts-Dual zu M^* ist. Dann läßt sich aber Lemma 9.3 unmittelbar anwenden. $\square$

Definition 9.7. Seien $(M^*, \mathrm{ev}_M, \mathrm{db}_M)$ und $(N^*, \mathrm{ev}_N, \mathrm{db}_N)$ Links-Duale von M bzw. N. Zu jedem Morphismus $f : M \longrightarrow N$ definieren wir den *transponierten Morphismus*

$$\begin{aligned}&(f^* : N^* \longrightarrow M^*) := \\ &(N^* \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{db}_M} N^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{1 \otimes f \otimes 1} N^* \otimes N \otimes M^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_N \otimes 1} M^*).\end{aligned}$$

Mit dieser Definition verhält sich die Bildung von Links-Dualen wie ein kontravarianter Funktor, denn es gilt

Lemma 9.8. *Zu* M, N, P *seien Links-Duale* $(M^*, \mathrm{ev}_M, \mathrm{db}_M)$, $(N^*, \mathrm{ev}_N, \mathrm{db}_N)$ *und* $(P^*, \mathrm{ev}_P, \mathrm{db}_P)$ *gegeben.*
1) Es ist $(1_M)^* = 1_{M^*}$.
2) Seien $f : M \longrightarrow N$ *und* $g : N \longrightarrow P$ *gegeben. Dann ist* $(gf)^* = f^* g^*$.

Beweis. 1) Es ist $(1_M)^* = (\mathrm{ev} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \mathrm{db}) = 1_{M^*}$.
2) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mathrm{db}_N \otimes 1"] \arrow[d, "f"] & N \otimes N^* \otimes M \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes f"] & \\
N \arrow[r, "\mathrm{db}_N \otimes 1"] & N \otimes N^* \otimes N \arrow[r, "1 \otimes \mathrm{ev}_N"] \arrow[d, "g \otimes 1 \otimes 1"] & N \arrow[d, "g"] \\
& P \otimes N^* \otimes N \arrow[r, "1 \otimes \mathrm{ev}_N"] & P
\end{tikzcd}$$

Also gilt $gf = (1 \otimes \mathrm{ev}_N)(g \otimes 1 \otimes f)(\mathrm{db}_N \otimes 1)$. Daher kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
P^* \arrow[r, "1\otimes \mathrm{db}"] \arrow[d, "1\otimes \mathrm{db}"] & P^*\otimes N\otimes N^* \arrow[r, "1\otimes g\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes \mathrm{db}"] & P^*\otimes P\otimes N^* \arrow[dd, "1\otimes \mathrm{db}"] \arrow[ddr, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & \\
P^*\otimes M\otimes M^* \arrow[r, "1\otimes \mathrm{db}\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes gf\otimes 1"] & P^*\otimes N\otimes N^*\otimes M\otimes M^* \arrow[dr, "1\otimes g\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes g\otimes 1\otimes f\otimes 1"'] & & \\
 & & P^*\otimes P\otimes N^*\otimes M\otimes M^* \arrow[dl, "1\otimes f\otimes 1"'] \arrow[dd, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & N^* \arrow[ddl, "1\otimes \mathrm{db}"] \\
P^*\otimes P\otimes M^* \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & P^*\otimes P\otimes N^*\otimes N\otimes M^* \arrow[l, "1\otimes \mathrm{ev}\otimes 1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & & \\
M^* & N^*\otimes N\otimes M^* \arrow[l, "1\otimes \mathrm{ev}"'] & N^*\otimes M\otimes M^* \arrow[l, "1\otimes f\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Übung 9.9. a) Bestimmen Sie alle Objekte M, die ein Links-Dual besitzen, in der Kategorie der $\mathbb{N}$-graduierten Vektorräume.
b) Bestimmen Sie alle Objekte M, die ein Links-Dual besitzen, in der Kategorie der Kettenkomplexe $\mathbb{K}$-Komp.
c) Bestimmen Sie alle Objekte M, die ein Links-Dual besitzen, in der Kategorie der Kokettenkomplexe $\mathbb{K}$-Kokomp.
d) Sei $(M^*, \mathrm{ev}\,\mathrm{db})$ ein Links-Dual zu M. Zeigen Sie, daß $\mathrm{db} : I \longrightarrow M \otimes M^*$ durch M, M^* und ev eindeutig bestimmt ist. (Eindeutigkeit der dualen Basis)
e) Sei $(M^*, \mathrm{ev}\,\mathrm{db})$ ein Links-Dual zu M. Zeigen Sie, daß $\mathrm{ev} : M^* \otimes M \longrightarrow I$ durch M, M^* und db eindeutig bestimmt ist.

Folgerung 9.10. *Seien M, N mit Links-Dualen $(M^*, \mathrm{ev}_M, \mathrm{db}_M)$ und $(N^*, \mathrm{ev}_N, \mathrm{db}_N)$ und $f : M \longrightarrow N$ gegeben. Dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathrm{db}_M"] \arrow[d, "\mathrm{db}_N"'] & M\otimes M^* \arrow[d, "f\otimes 1"] \\
N\otimes N^* \arrow[r, "1\otimes f^*"'] & N\otimes M^*.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es ist $(f\otimes 1_{M^*})\,\mathrm{db}_M = ((1_N\otimes \mathrm{ev}_N)(1_N\otimes 1_{N^*}\otimes f)(\mathrm{db}_N\otimes 1_M)\otimes 1_{M^*})\,\mathrm{db}_M = (1_N\otimes \mathrm{ev}_N\otimes 1_{M^*})(1_N\otimes 1_{N^*}\otimes f\otimes 1_{M^*})(\mathrm{db}_N\otimes 1_M\otimes 1_{M^*})\,\mathrm{db}_M = (1_N\otimes \mathrm{ev}_N\otimes 1_{M^*})(1_N\otimes 1_{N^*}\otimes f\otimes 1_{M^*})(1_N\otimes 1_{N^*}\otimes \mathrm{db}_M)\,\mathrm{db}_N = (1_N\otimes (\mathrm{ev}_N\otimes 1_{M^*})(1_{N^*}\otimes f\otimes 1_{M^*})(1_{N^*}\otimes \mathrm{db}_M))\,\mathrm{db}_N = (1_N\otimes f^*)\,\mathrm{db}_N$. □

Folgerung 9.11. *Seien* M, N *mit Links-Dualen* $(M^*, \mathrm{ev}_M, \mathrm{db}_M)$ *und* $(N^*, \mathrm{ev}_N, \mathrm{db}_N)$ *und* $f : M \longrightarrow N$ *gegeben. Dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd} N^* \otimes M \arrow[r, "f^* \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes f"'] & M^* \otimes M \arrow[d, "\mathrm{ev}_M"] \\ N^* \otimes N \arrow[r, "\mathrm{ev}_N"'] & I. \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Symmetrie der Definition eines Links-Duals. $\square$

Beispiel 9.12. Sei $M \in {}_R\mathcal{M}_R$ ein R-R-Bimodul. Dann ist auch $\mathrm{Hom}_R(M., R.)$ ein R-R-Bimodul durch $(rfs)(x) = rf(sx)$. Außerdem haben wir den Morphismus $\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}_R(M., R.) \otimes_R M \longrightarrow R$ definiert durch $\mathrm{ev}(f \otimes_R m) = f(m)$.
(Dual-Basis-Lemma:) Ein Modul $M \in \mathcal{M}_R$ heißt *endlich erzeugt projektiv*, wenn es $m_1, \ldots, m_n \in M$ und $m^1, \ldots, m^n \in \mathrm{Hom}_R(M., R.)$ so gibt, daß gilt

$$\forall m \in M : \sum_{i=1}^n m_i m^i(m) = m.$$

Dieses ist eigentlich eine Folge des Dual-Basis-Lemmas, aber zu der gewöhnlich verwendeten Definition eines endlich erzeugten projektiven Moduls äquivalent.
Sei $M \in {}_R\mathcal{M}_R$. M ist als R-Rechts-Modul genau dann endlich erzeigt projektiv, wenn M ein Links-Dual besitzt. Das Links-Dual ist isomorph zu $\mathrm{Hom}_R(M., R.)$.
Ist M_R endlich erzeugt projektiv, so verwenden wir $\mathrm{db} : R \longrightarrow M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M., R.)$ mit $\mathrm{db}(1) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes_R m^i$. Denn dann ist $(1 \otimes_R \mathrm{ev})(\mathrm{db} \otimes_R 1)(m) = (1 \otimes_R \mathrm{ev})(\sum m_i \otimes_R m^i \otimes_R m) = \sum m_i m^i(m) = m$. Außerdem ist $(\mathrm{ev} \otimes_R 1)(1 \otimes_R \mathrm{db})(f)(m) = (\mathrm{ev} \otimes_R 1)(\sum_{i=1}^n f \otimes_R m_i \otimes_R m^i)(m) = \sum f(m_i) m^i(m) = f(\sum m_i m^i(m)) = f(m)$ für alle $m \in M$, also $(\mathrm{ev} \otimes_R 1)(1 \otimes_R \mathrm{db})(f) = f$.
Besitzt M umgekehrt ein Links-Dual M^*, so definiert $\mathrm{ev} : M^* \otimes_R M \longrightarrow R$ einen Homomorphismus $\iota : M^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M., R.)$ in ${}_R\mathcal{M}_R$ durch $\iota(m^*)(m) = \mathrm{ev}(m^* \otimes_R m)$. Setzen wir $\sum_{i=1}^n m_i \otimes m^i := \mathrm{db}(1) \in M \otimes M^*$, so gilt $m = (1 \otimes \mathrm{ev})(\mathrm{db} \otimes 1)(m) = (1 \otimes \mathrm{ev})(\sum m_i \otimes m^i \otimes m) = \sum m_i \iota(m^i)(m)$, so

daß $m_1, \ldots, m_n \in M$ und $\iota(m^1), \ldots, \iota(m^n) \in \mathrm{Hom}_R(M., R.)$ eine duale Basis für M bilden, d.h. daß M endlich erzeugt projektiv als R-Rechts-Modul ist. Damit sind aber M^* und $\mathrm{Hom}_R(M., R.)$ (vermöge ι) isomorph.
Analog wird $\mathrm{Hom}_R(.M, .R)$ ein Rechts-Dual zu M genau dann, wenn M als R-Links-Modul endlich erzeugt projektiv ist.

Definition 9.13. Seien Objekte M, N in $\mathcal{C}$ gegeben. Ein Objekt $[M, N]$ heißt *inneres Hom* von M und N, wenn es einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-} \otimes M, N) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, [M, N])$ gibt, d.h. wenn es den Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-} \otimes M, N)$ darstellt.
Wenn es einen in den drei Objekten M, N, P natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P \otimes M, N) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, [M, N])$ gibt, dann heißt die Kategorie $\mathcal{C}$ *monoidal links abgeschlossen*.
Wenn es einen in den drei Objekten M, N, P natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M \otimes P, N) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, [M, N])$ gibt, dann heißt die Kategorie $\mathcal{C}$ *monoidal rechts abgeschlossen*.

Wenn M ein Links-Dual M^* in $\mathcal{C}$ besitzt, dann sind innere Homs $[M, \text{-}]$ definiert durch $[M, N] := N \otimes M^*$. Insbesondere sind links starre monoidale Kategorien links abgeschlossen.

Beispiel 9.14. (1) Die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist eine monoidale Kategorie, in der jedes Objekt ein (Links- und Rechts-)Dual besitzt.

(2) Sei Ban die Kategorie der (komplexen) Banach-Räume, wobei die Morphismen $f : M \longrightarrow N$ lineare Abbildungen sind mit $\| f(m) \| \leq \| m \|$, d.h. die Abbildungen sind durch 1 beschränkt oder kontrahierend. *Ban* ist eine monoidale Kategorie durch $M \widehat{\otimes} N$, das vervollständigte Tensorprodukt. Ein innerer Hom-Funktor $[M, N]$ existiert in Ban und besteht aus der Menge der beschränkten lineare Abbildungen von M nach N, die man in geeigneter Weise zu einem Banach-Raum machen kann. Damit ist Ban eine monoidal abgeschlossene Kategorie.

(3) Sei H eine Hopf Algebra. Dann ist die Kategorie der H-Rechts-Moduln (vgl. Beispiel 8.4 b)) eine monoidale Kategorie. Seien $M, N \in \mathcal{M}_H$. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$ in $\mathcal{M}_H$ durch die Multiplikation
$$(f \cdot h)(m) := \sum_h f(mS(h_{(1)})h_{(2)}.$$

Dabei sei $\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ (Sweedler Notation). Es ist nämlich $((f \cdot h) \cdot k)(m) = (f \cdot h)(mS(k_1))k_2 = f(mS(k_1)S(h_1))h_2k_2 = f(mS((hk)_1)(hk)_2 = (f \cdot (hk))(m)$ und $(f \cdot 1)(m) = f(m1)1 = f(m)$. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$ ist ein innerer Hom-Funktor in der monoidalen Kategorie $\mathcal{M}_H$. Der Isomorphismus $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M \otimes P, N)$ läßt sich nämlich ein schränken zu einem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_H(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_H(M \otimes P, N),$$

weil gelten $\varphi(f)((m \otimes p)h) = \varphi(f)(\sum mh_1 \otimes ph_2) = \sum f(ph_2)(mh_1) = \sum(f(p) \cdot h_2)(mh_1) = \sum f(p)(mh_1S(h_2))h_3 = f(p)(m)h = \varphi(f)(m \otimes p)h$ und umgekehrt $(f(p)h)(m) = \sum f(p)(mS(h_1))h_2 = \sum \varphi(f)(mS(h_1) \otimes p)h_2 = \sum \varphi(f)((mS(h_1) \otimes p)h_2) = \sum \varphi(f)(mS(h_1)h_2 \otimes ph_3) = \varphi(f)(m \otimes ph) = f(ph)(m)$. Damit ist $\mathcal{M}_H$ rechts abgeschlossen.

Wenn $M \in \mathcal{M}_H$ als Vektorraum endlich dimensional ist, dann ist ${}^*M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ wieder ein H-Rechts-Modul durch $(f \cdot h)(m) := f(mS(h))$. ${}^*M$ ist ein Rechts-Dual zu M mit den Homomorphismen

$$\mathrm{db} : \mathbb{K} \ni 1 \mapsto \sum_i m^i \otimes m_i \in {}^*M \otimes M$$

und

$$\mathrm{ev} : M \otimes {}^*M \ni m \otimes f \mapsto f(m) \in \mathbb{K},$$

wobei m_i und m^i eine duale Basis des Vektorraumes M bilden. Es ist sicherlich $(1 \otimes \mathrm{ev})(\mathrm{db} \otimes 1) = 1_{{}^*M}$ und $(\mathrm{ev} \otimes 1)(1 \otimes \mathrm{db}) = 1_M$, weil M endlich dimensionaler Vektorraum ist. Zu zeigen ist, daß db und ev H-Homomorphismen sind. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{db}(1)h)(m) = ((\textstyle\sum m^i \otimes m_i)h)(m) = (\textstyle\sum m^i h_1 \otimes m_i h_2)(m) = \\
&\textstyle\sum(m^i h_1)(m) m_i h_2 = \sum m^i(mS(h_1)) m_i h_2 = \\
&\textstyle\sum(\sum m^i(mS(h_1))m_i)h_2 = \sum mS(h_1)h_2 = m\varepsilon(h) = \\
&(\textstyle\sum m^i \otimes m_i \varepsilon(h))(m) = \mathrm{db}(1)\varepsilon(h)(m) = \\
&\mathrm{db}(1\varepsilon(h))(m) = \mathrm{db}(1h)(m),
\end{aligned}$$

also $\mathrm{db}(1)h = \mathrm{db}(1h)$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ev}(m \otimes f)h = f(m)h = \textstyle\sum f(mh_1S(h_2))h_3 = \sum(fh_2)(mh_1) = \\
&\textstyle\sum \mathrm{ev}(mh_1 \otimes fh_2) = \mathrm{ev}((m \otimes f)h).
\end{aligned}$$

(4) Sei H eine Hopf Algebra. Dann ist die Kategorie der H-Rechts-Komoduln (vgl. Beispiel 8.4 c)) eine monoidale Kategorie. Sei $M \in \mathcal{M}^H$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Sei m_i eine Basis für M und die Komodul Diagonale $\delta(m_j) = \sum m_i \otimes h_{ij}$. Dann gilt $\Delta(h_{ik}) = \sum h_{ij} \otimes h_{jk}$. ${}^*M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ wird zu einem H-Rechts-Komodul durch $\delta(m^i) := \sum m^j \otimes S(h_{ij})$. Man rechnet nach, daß ${}^*M$ ein Rechts-Dual von M ist.

KAPITEL X

Tannaka Dualität

In diesem Kapitel wollen wir zweierlei erreichen. Einerseits wollen wir zeigen, daß ein Quantenmonoid aus seinen Darstellungen eindeutig (bis auf Isomorphie) zurückgewonnen werden kann. Diesen Prozeß der Rekonstruktion werden wir auch noch verallgemeinern. Andererseits werden wir zeigen, daß der Prozeß der Rekonstruktion auch geeignet ist, die Tambara-Konstruktion des universellen Quantenmonoids eines nichtkommutativen geometrischen Raumes durchzuführen und damit aus anderer Sicht zu verstehen.

Sei $\mathcal{D}$ ein beliebiges Diagrammschema. Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale kovollständige Kategorie, so daß das Tensorprodukt in beiden Argumenten mit Kolimites vertauscht. Sei $\mathcal{C}_0$ die volle Unterkategorie der Objekte in $\mathcal{C}$, die ein Links-Dual besitzen. Sei weiterhin $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$, so daß für alle $X \in \mathcal{D}$ gilt $\omega(X) \in \mathcal{C}_0$. Ein solches Diagramm nennen wir auch ein *endliches Diagramm* in $\mathcal{C}$. Für ein Objekt $M \in \mathcal{C}$ sei schließlich $\omega \otimes M : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ der Funktor mit $(\omega \otimes M)(X) = \omega(X) \otimes M$.

SATZ 10.1. *(Tannaka-Krein) Sei wie oben ein Diagramm* $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ *gegeben. Dann gibt es ein Objekt* $\operatorname{coend}(\omega) \in \mathcal{C}$ *und eine natürliche Transformation* $\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes \operatorname{coend}(\omega)$*, so daß für jedes Objekt* $M \in \mathcal{C}$ *und jede natürliche Transformation* $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes M$ *genau ein Morphismus* $\widetilde{\varphi} : \operatorname{coend}(\omega) \longrightarrow M$ *so existiert, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
& \omega \otimes M
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Aus ω konstruieren wir ein neues Diagramm $\omega^* \otimes \omega$ in $\mathcal{C}$. Die Objekte dieses Diagramms seien $\omega(X)^* \otimes \omega(Y)$ für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{D}$. Dabei sei $\omega(X)^*$ das Links-Dual von $\omega(X)$. Für jedes $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{D}$ konstruieren wir zwei Morphismen des Diagramms $\omega(f)^* \otimes 1 : \omega(Y)^* \otimes \omega(X) \longrightarrow \omega(X)^* \otimes \omega(X)$ und $1 \otimes \omega(f) : \omega(Y)^* \otimes \omega(X) \longrightarrow \omega(Y)^* \otimes \omega(Y)$. Das sollen alle Morphismen des Diagramms $\omega^* \otimes \omega$ sein. Sei schließlich $\mathrm{coend}(\omega) := \varinjlim(\omega^* \otimes \omega)$ mit den Injektionen $\iota(X,Y) : \omega(X)^* \otimes \omega(Y) \longrightarrow \mathrm{coend}(\omega)$.

Für $X \in \mathcal{C}$ definieren wir jetzt den Morphismus $\delta(X) : \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes \mathrm{coend}(\omega)$ durch $(1 \otimes \iota(X,X))(\mathrm{db} \otimes 1) : \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes \omega(X)^* \otimes \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes \mathrm{coend}(\omega)$. Dann ist wie in Abschnitt 9 $\iota(X,X) = (1 \otimes \mathrm{ev})(1 \otimes \delta(X))$.

Wir zeigen, daß δ eine natürliche Transformation ist. Für jedes $f : X \longrightarrow Y$ kommutiert das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathrm{db}_X"] \arrow[d, "\mathrm{db}_Y"'] & \omega(X) \otimes \omega(X)^* \arrow[d, "\omega(f)\otimes 1"] \\
\omega(Y) \otimes \omega(Y)^* \arrow[r, "1\otimes\omega(f)^*"'] & \omega(Y) \otimes \omega(X)^*.
\end{tikzcd}$$

nach Folgerung 9.10. Daher kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[d, "\omega(f)\otimes 1\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\iota(X,X)"] & \\
\omega(X) \arrow[urr, "\mathrm{db}\otimes 1"] \arrow[d, "\omega(f)"'] \arrow[dr, "\mathrm{db}\otimes 1"'] & \omega(X)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[ur, "1\otimes\omega(f)^*\otimes 1"] \arrow[d, "\omega(f)\otimes 1\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes 1\otimes\omega(f)"] & \omega(Y)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[dr, "1\otimes\iota(X,X)"'] & \omega(X)\otimes\mathrm{coend} \arrow[d, "\omega(f)\otimes 1"] \\
\omega(Y) \arrow[drr, "\mathrm{db}\otimes 1"'] & \omega(Y)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[ur, "1\otimes\omega(f)^*\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes 1\otimes\omega(f)"] & \omega(X)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(Y) \arrow[ur, "1\otimes\iota(Y,Y)"] \arrow[d, "\omega(f)\otimes 1\otimes 1"] & \omega(Y)\otimes\mathrm{coend} \\
 & & \omega(Y)\otimes\omega(Y)^*\otimes\omega(Y) \arrow[ur, "1\otimes\iota(Y,Y)"'] &
\end{tikzcd}$$

Seien nun ein Objekt $M \in \mathcal{C}$ und eine natürliche Transformation $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes M$ gegeben. Wir beachten, daß

$$\begin{tikzcd}
\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "\omega(f)^*\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\omega(f)"'] & \omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(Y) \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & I
\end{tikzcd}$$

nach Folgerung 9.11 kommutiert und daher auch

$$\begin{tikzcd}
\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[rr, "1\otimes\varphi(X)"] & & \omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes M \arrow[dr, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(X) \arrow[u, "\omega(f)^*\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\omega(f)"] \arrow[r, "1\otimes\varphi(X)"] & \omega(Y)^*\otimes\omega(X)\otimes M \arrow[ur, "\omega(f)^*\otimes 1\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\omega(f)\otimes 1"'] & & M \\
\omega(Y)^*\otimes\omega(Y) \arrow[rr, "1\otimes\varphi(Y)"] & & \omega(Y)^*\otimes\omega(Y)\otimes M \arrow[ur, "\mathrm{ev}\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir definieren $\widetilde{\varphi} : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow M$ aus der Kolimes-Eigenschaft als universelle Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
 & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[dr, "\iota(X,X)"] \arrow[drr, "(\mathrm{ev}\otimes 1)(1\otimes\varphi(X))"] & & \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[ur, "\omega(f)^*\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\omega(f)"'] & & \mathrm{coend}(\omega) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & M \\
 & \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[ur, "\iota(Y,Y)"'] \arrow[urr, "(\mathrm{ev}\otimes 1)(1\otimes\varphi(Y))"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\mathrm{db}\otimes 1"] \arrow[dr, "\delta(X)"'] & \omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[r, "1\otimes\varphi(X)"] \arrow[d, "1\otimes\iota(X,X)"] & \omega(X)\otimes\omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes M \arrow[d, "1\otimes\mathrm{ev}\otimes 1"] \\
 & \omega(X)\otimes\mathrm{coend} \arrow[r, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] & \omega(X)\otimes M
\end{tikzcd}$$

Das Äußere dieses Diagramms ergibt

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "\delta(X)"] \arrow[dr, "\varphi(X)"'] & \omega(X)\otimes\mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
 & \omega(X)\otimes M.
\end{tikzcd}$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\widetilde{\varphi} : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow M$ eindeutig bestimmt ist. Sei auch $\widetilde{\varphi}_0 : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow M$ mit $\varphi(X) = (\widetilde{1} \otimes \varphi_0)\delta(X)$ gegeben, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\omega(X)^*\otimes\omega(X) \arrow[rr, "\iota(X,X)"] \arrow[dr, "1\otimes\delta(X)"] \arrow[ddr, "1\otimes\varphi(X)"'] & & \mathrm{coend}(\omega) \arrow[dd, "\widetilde{\varphi}_0"] \\
 & \omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes\mathrm{coend}(\omega) \arrow[ur, "\mathrm{ev}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes 1\otimes\widetilde{\varphi}_0"] & \\
 & \omega(X)^*\otimes\omega(X)\otimes M \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes 1"] & M,
\end{tikzcd}$$

also ist $\widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}$. $\square$

FOLGERUNG 10.2. *Es ist*

$$\coprod_{f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}} \omega(\mathrm{Zi}(f))^* \otimes \omega(\mathrm{Qu}(f)) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \coprod_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}} \omega(X)^* \otimes \omega(X) \longrightarrow \mathrm{coend}(\omega)$$

ein Differenzkokern.

Beweis. Das ist eine Umformulierung der Bemerkung 5.12. Man beachte, daß hier der Fall eines Kolimes vorliegt und daß man nicht alle Objekte des Diagramms im Koprodukt verwenden muß, sondern nur diejenigen der Form $\omega(X)^* \otimes \omega(X)$. □

Folgerung 10.3. *Der Funktor* $\mathrm{Nat}(\omega, \omega \otimes M)$ *ist durch* $\mathrm{coend}(\omega)$ *darstellbar als Funktor in* M*.*

Beweis. Aus dem gelösten universellen Problem folgt der Isomorphismus

$$\mathrm{Nat}(\omega, \omega \otimes M) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{coend}(\omega), M). \quad \square$$

Man kann ebenso auch für verschiedene Funktoren $\omega, \omega' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ einen Isomorphismus $\mathrm{Nat}(\omega, \omega' \otimes M) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(\omega', \omega), M)$ konstruieren und damit *Komorphismen-Objekte* definieren. Dazu muß lediglich ω' Werte in $\mathcal{C}_0$ annehmen.

Folgerung 10.4. $\mathrm{coend}(\omega)$ *ist auf genau eine Weise eine Koalgebra, so daß die Diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1 \otimes \Delta"] \\
\omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[r, "\delta \otimes 1"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \otimes \mathrm{coend}(\omega)
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_\omega"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon"] \\
& \omega \otimes I
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis. Die Diagramme definieren wegen der universellen Eigenschaft von $\mathrm{coend}(\omega)$ die Strukturmorphismen

$$\Delta : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow \mathrm{coend}(\omega) \otimes \mathrm{coend}(\omega)$$

und

$$\varepsilon : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow I.$$

Daraus folgt auch unmittelbar die Koalgebreneigenschaft ähnlich wie im Beweis von Folgerung 7.21. □

Man beachte, daß durch diese Konstruktion alle Objekte und alle Morphismen aus dem Diagramm ω Komoduln bzw. Komodul Morphismen über der Koalgebra $\mathrm{coend}(\omega)$ geworden sind. Tatsächlich ist $C := \mathrm{coend}(\omega)$ sogar die universelle Koalgebra, über der das vorgegebene Diagramm ein Diagramm von Komoduln wird.

Folgerung 10.5. *Sei $(\mathcal{D}, \omega)$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$ mit Objekten in $\mathcal{C}_0$. Dann sind alle Objekte des Diagramms Komoduln über der Koalgebra $C :=$ $\mathrm{coend}(\omega)$ und alle Morphismen des Diagramms Komodul Morphismen. Wenn D eine weitere Koalgebra ist und alle Objekte des Diagramms D-Komoduln durch $\varphi(X) : \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes D$ sind und alle Morphismen des Diagramms D-Komodul Morphismen sind, dann gibt es genau einen Koalgebren Morphismus $\widetilde{\varphi} : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow D$, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
& \omega \otimes D
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Morphismen $\varphi(X) : \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes D$ bilden eine natürliche Transformation, da alle Morphismen des Diagramms Komodul Morphismen sind. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit eines Morphismus $\widetilde{\varphi} : \mathrm{coend}(\omega) \longrightarrow D$ klar. Es bleibt zu zeigen, daß dieses ein Koalgebren Morphismus ist. Das folgt aus der universellen Eigenschaft von $C = \mathrm{coend}(\omega)$ durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "1"'] & & \omega \otimes C \arrow[dr, "1\otimes\Delta"] \arrow[dd, "1\otimes\widetilde{\varphi}"' near start] & \\
& \omega \otimes C \arrow[rr, "\delta\otimes 1" near start] \arrow[dd, "1\otimes\widetilde{\varphi}" near start] & & \omega \otimes C \otimes C \arrow[dd, "1\otimes\widetilde{\varphi}\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
\omega \arrow[rr, "\varphi" near start] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \omega \otimes D \arrow[dr, "1\otimes\Delta"'] & \\
& \omega \otimes D \arrow[rr, "\varphi\otimes 1"'] & & \omega \otimes D \otimes D
\end{tikzcd}$$

wobei die rechte Seite des Würfels wegen der universellen Eigenschaft kommutiert. Ähnlich zeigt man, daß $\widetilde{\varphi}$ die Koeinheit erhält. $\square$

Seien $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ und $\omega' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{C}$ Diagramme in $\mathcal{C}$. Das Diagramm $(\mathcal{D}, \omega) \otimes (\mathcal{D}', \omega') := (\mathcal{D} \times \mathcal{D}', \omega \otimes \omega')$ mit $(\omega \otimes \omega')(X, Y) := \omega(X) \otimes \omega'(Y)$ nennen wir das Tensorprodukt dieser beiden Diagramme. Das neue Diagramm besteht also aus allen Tensorprodukten der Objekte bzw. Morphismen der beiden urprünglichen Diagramme.

Wir setzen von nun an voraus, daß die Kategorie $\mathcal{C}$ die Kategorie der Vektorräume Vek ist, und verwenden die Symmetrie $\tau : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ in Vek.

Lemma 10.6. *Seien $(\mathcal{D}, \omega)$ und $(\mathcal{D}', \omega')$ endliche Diagramme in* Vek. *Dann ist*

$$\operatorname{coend}(\omega) \otimes \operatorname{coend}(\omega') \cong \operatorname{coend}(\omega \otimes \omega').$$

Beweis. Wir beachten zunächst folgendes. Wenn zwei Diagramme $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \text{Vek}$ und $\omega' : \mathcal{D}' \longrightarrow \text{Vek}$ gegeben sind, so ist $\varinjlim_{\mathcal{D}} \varinjlim_{\mathcal{D}'}(\omega \otimes \omega') \cong \varinjlim_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'}(\omega \otimes \omega') \cong \varinjlim_{\mathcal{D}}(\omega) \otimes \varinjlim_{\mathcal{D}'}(\omega')$, weil das Tensorprodukt mit Kolimites vertauschbar ist und Kolimites untereinander vertauschbar sind. Man betrachte dazu das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega'(Y) \arrow[r] \arrow[d] & \omega(X) \otimes \varinjlim_{\mathcal{D}'}(\omega') \arrow[d] & \\
\varinjlim_{\mathcal{D}}(\omega) \otimes \omega'(Y) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathcal{D}}(\omega) \otimes \varinjlim_{\mathcal{D}'}(\omega') \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varinjlim_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'}(\omega \otimes \omega').
\end{tikzcd}$$

Dann ist aber auch $\operatorname{coend}(\omega \otimes \omega') \cong \varinjlim_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'}((\omega \otimes \omega')^* \otimes (\omega \otimes \omega')) \cong \varinjlim_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'}(\omega^* \otimes \omega \otimes \omega'^* \otimes \omega') \cong \varinjlim_{\mathcal{D}}(\omega^* \otimes \omega) \otimes \varinjlim_{\mathcal{D}'}(\omega'^* \otimes \omega') \cong \operatorname{coend}(\omega) \otimes \operatorname{coend}(\omega')$. $\square$

Folgerung 10.7. *Für endliche Diagramme $(\mathcal{D}, \omega)$ und $(\mathcal{D}', \omega')$ in $\mathcal{D}$ gibt es eine universelle natürliche Transformation $\delta : \omega \otimes \omega' \longrightarrow \omega \otimes \omega' \otimes \operatorname{coend}(\omega) \otimes \operatorname{coend}(\omega')$, so daß für jedes Objekt M und jede natürliche Transformation $\varphi : \omega \otimes \omega' \longrightarrow \omega \otimes \omega' \otimes M$ genau ein Morphismus $\widetilde{\varphi} : \operatorname{coend}(\omega) \otimes \operatorname{coend}(\omega') \longrightarrow M$ existiert, so daß*

$$\begin{tikzcd}
\omega \otimes \omega' \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \omega \otimes \omega' \otimes \mathrm{coend}(\omega) \otimes \mathrm{coend}(\omega') \arrow[d, "1\otimes 1\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
& \omega \otimes \omega' \otimes M
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 10.8. Sei $(\mathcal{D}, \omega)$ ein Diagramm in Vek. Seien $\mathcal{D}$ eine monoidale Kategorie und ω ein monoidaler Funktor. Dann heißt $(\mathcal{D}, \omega)$ ein *monoidales Diagramm.*

Sei $(\mathcal{D}, \omega)$ ein monoidales Diagramm in Vek. Sei $A \in$ Vek eine Algebra. Eine natürliche Transformation $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes B$ heißt *monoidal*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[r, "\varphi(X)\otimes\varphi(Y)"] \arrow[d, "\rho"'] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes B \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes m"] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\varphi(X\otimes Y)"] & \omega(X \otimes Y) \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d] \\
\omega(I) \arrow[r, "\varphi(I)"] & \omega(I) \otimes B
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Wir bezeichnen die Menge der monoidalen natürlichen Transformationen mit $\mathrm{Nat}^{\otimes}(\omega, \omega \otimes B)$. Dieses ist offenbar ein Funktor in B.

Übung 10.9. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Nat}^{\otimes}(\omega, \omega \otimes B)$ ein Funktor in B ist.

Satz 10.10. *Sei $(\mathcal{D}, \omega)$ ein endliches monoidales Diagramm in* Vek*. Dann ist* $\mathrm{coend}(\omega)$ *eine Bialgebra und* $\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega)$ *eine monoidale natürliche Transformation.*

Beweis. Die Multiplikation von $\mathrm{coend}(\omega)$ folgt aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[d] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes \mathrm{coend}(\omega) \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\delta"'] & \omega(X \otimes Y) \otimes \mathrm{coend}(\omega)
\end{tikzcd}$$

Zur Konstruktion der Einheit betrachten wir das Diagramm $\mathcal{D}_0 = (\{I\},\{\mathrm{id}\})$ zusammen mit $\omega_0 : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathrm{Vek}$, $\omega_0(I) = \mathbb{K}$, was das monoidale Einheitsobjekt in der monoidalen Kategorie der Diagramme in Vek ist. Dann ist $(\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\otimes\mathbb{K}) = (\omega_0 \longrightarrow \omega_0 \otimes \mathrm{coend}(\omega_0))$ die universelle Abbildung. Das folgende Diagramm induziert dann die Einheit für $\mathrm{coend}(\omega)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[d] \\
\omega(I) \arrow[r] & \omega(I)\otimes \mathrm{coend}(\omega)
\end{tikzcd}$$

Damit weist man dann unter Verwendung der universellen Eigenschaft die Bialgebrengesetze nach.
Die oben angegebenen Diagramme zeigen zugleich, daß die natürliche Transformation $\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega)$ monoidal ist. $\square$

Übung 10.11. Wenn A eine endlich dimensionale Algebra ist und $\delta : A \longrightarrow M(A)\otimes A$ die universelle Kooperation der Tambara-Bialgebra auf A von links ist, dann ist $\tau\delta : A \longrightarrow A \otimes M(A)$ (mit derselben Multiplikation auf $M(A)$) eine universelle Kooperation von $M(A)$ auf A von rechts. Die durch diese Kooperation definierte Komultiplikation ist $\tau\Delta : M(A) \longrightarrow M(A)\otimes M(A)$. (Wir unterscheiden daher zwischen der linken und der rechten Tambara-Bialgebra von A und haben $M_r(A) = M_l(A)^{cop}$.)

Wir betrachten jetzt ein besonderes monoidales Diagramm $\mathcal{D} := \mathcal{D}[X; m, u]$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Vek strikt monoidal ist. $\mathcal{D}[X; m, u]$ bestehe aus den Objekten $X\otimes\ldots\otimes X = X^{\otimes n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $I := X^{\otimes 0}$, und den Morphismen $m : X\otimes X \longrightarrow X$, $u : I \longrightarrow X$ und allen formal aus m, u, id, Tensorprodukten und Kompositionen gebildeten Morphismen.
Sei A eine Algebra mit der Multiplikation $m_A : A\otimes A \longrightarrow A$ und der Einheit $u_A : \mathbb{K} \longrightarrow A$. Dann ist $\omega_A : \mathcal{D} \longrightarrow C$ mit $\omega(X) = A$, $\omega(X^{\otimes n}) = A^{\otimes n}$, $\omega(m) = m_A$ und $\omega(u) = u_A$ ein (strikt) monoidaler Funktor. Wenn A endlich dimensional ist, dann ist das Diagramm endlich. Dann gilt

Satz 10.12. *Für eine endlich-dimensionale Algebra A sind die (rechtsseitige) Tambara-Bialgebra $M(A)$ und* $\mathrm{coend}(\omega_A)$ *als Bialgebren isomorph.*

Beweis. Wir haben die Tambara-Bialgebra für linksseitige Kooperationen $f : A \longrightarrow M(A) \otimes A$ genauer studiert, benötigen sie jedoch hier rechtsseitig universell als Morphismus $f : A \longrightarrow A \otimes M(A)$ (vgl. Übung 10.11). Sei B eine Algebra und $f : A \longrightarrow A \otimes B$. Sei $\omega = \omega_A$. Wir definieren

$$\varphi(X^{\otimes n}) : \omega(X^{\otimes n}) = A^{\otimes n} \xrightarrow{f^{\otimes n}} A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n} \xrightarrow{1 \otimes m_B^n} A^{\otimes n} \otimes B = \omega(X^{\otimes n}) \otimes B,$$

wobei $m_B^n : B^{\otimes n} \longrightarrow B$ die n-fache Multiplikation auf B bedeute. φ ist eine natürliche Transformation, denn die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\varphi(I)"] \arrow[d, "u"'] & \mathbb{K} \otimes B \arrow[d, "1 \otimes u"] \\
A \arrow[r, "\varphi(X)"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rrrr, "\varphi(X \otimes X)"] \arrow[dr, "f \otimes f"] \arrow[ddd, "m"'] & & & & A \otimes A \otimes B \arrow[ddd, "m \otimes 1"] \\
& A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[d, "m \otimes m"] \arrow[urrr, "1 \otimes m"'] & & & \\
& A \otimes B \arrow[drrr, "1 \otimes 1"] & & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rrrr, "\varphi(X)"'] & & & & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Weiterhin kommutieren

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes r} \otimes A^{\otimes s} \arrow[rrrr, "\varphi(X^{\otimes r}) \otimes \varphi(X^{\otimes s})"] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & & A^{\otimes r} \otimes A^{\otimes s} \otimes B \otimes B \arrow[ddd] \\
& A^{\otimes r} \otimes A^{\otimes s} \otimes B^{\otimes r} \otimes B^{\otimes s} \arrow[d] \arrow[urrr] & & & \\
& A^{\otimes (r+s)} \otimes B^{\otimes (r+s)} \arrow[drrr] & & & \\
A^{\otimes (r+s)} \arrow[ur] \arrow[rrrr, "\varphi(X^{\otimes (r+s)})"'] & & & & A^{\otimes (r+s)} \otimes B
\end{tikzcd}$$

so daß $\varphi : \omega_A \longrightarrow \omega_A \otimes B$ ein monoidale natürliche Transformation ist.
Sei umgekehrt eine natürliche Transformation $\varphi : \omega_A \longrightarrow \omega_A \otimes B$ gegeben. Sei $f := \varphi(X) : A \longrightarrow A \otimes B$. Dann kommutieren

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "="'] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[d, "1\otimes m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\varphi(X\otimes X)"] \arrow[d, "m"'] & A \otimes A \otimes B \arrow[d, "m\otimes 1"] \\
A \arrow[r, "f"] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "="'] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d] \\
\mathbb{K} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathbb{K} \otimes B \arrow[d, "u\otimes 1"] \\
A \arrow[r, "f"] & A \otimes B.
\end{tikzcd}$$

Also ist $f : A \longrightarrow A \otimes B$ ein Algebren Homomorphismus.
Wir haben damit einen in B natürlichen Isomorphismus

$$\mathbb{K}\text{- Alg}(A, A \otimes B) \cong \mathrm{Nat}^{\otimes}(\omega_A, \omega_A \otimes B)$$

definiert. Wenn A endlich dimensional ist, dann wird die linke Seite durch die Tambara-Bialgebra $M_r(A)$ dargestellt und die rechte Seite durch $\mathrm{coend}(\omega_A)$. Daher müssen diese beiden Bialgebren isomorph sein. $\square$

Folgerung 10.13. *Es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus von Bialgebren $M_r(A) \cong \mathrm{coend}(\omega_A)$, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & A \otimes M_r(A) \arrow[d] \\
& A \otimes \mathrm{coend}(\omega_A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Bedingung für die universelle Eigenschaft. $\square$

Damit kann die Tambara-Algebra, die das universelle Monoid von nichtkommutativen geometrischen Räumen in endlicher Dimension bestimmt, aus der Darstellungstheorie durch die Tannaka-Krein *Rekonstruktion* als Spezialfall gewonnen werden. Ähnliches gilt für komplizierter definierte Quantenräume, wie z.B. sogenannte quadratische Räume.

Wir zeigen jetzt, daß man eine beliebige Koalgebra C mit den obigen Methoden aus der Kenntnis *aller* ihrer Darstellungen, genauer aus dem Vergißfunktor $\omega : \mathcal{M}^C \longrightarrow \text{Vek}$, zurückgewinnen kann. Hier kann man also nicht mehr die übliche Konstruktion von $\text{coend}(\omega)$ verwenden, die ja auf endlich dimensionale Komoduln beschränkt ist. Gleichzeitig ist der folgende Satz auch ein Beispiel dafür, daß die Beschränkung auf endlich dimensionale Komoduln im allgemeinen zu stark ist, daß es auch für allgemeinere Diagramme Koendomorphismen Bialgebren geben kann. Andererseits gilt der folgende Satz auch dann, wenn man sich allein auf die endlich dimensionalen Darstellungen von C beschränkt. Der Beweis ist dann etwas aufwendiger.

Definition 10.14. Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale Kategorie. Eine Kategorie $\mathcal{D}$ zusammen mit einem Bifunktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ und natürlichen Isomorphismen $\beta : (A \otimes B) \otimes M \longrightarrow A \otimes (B \otimes M)$, $\eta : I \otimes M \longrightarrow M$ heißt eine $\mathcal{C}$-*Kategorie*, wenn die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes M \arrow[r, "\alpha(A,B,C)\otimes 1"] \arrow[d, "\beta(A\otimes B,C,M)"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes M \arrow[r, "\beta(A,B\otimes C,M)"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes M) \arrow[d, "1\otimes\beta(B,C,M)"'] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes M) \arrow[rr, "\beta(A,B,C\otimes M)"] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes M \arrow[rr, "\beta(A,I,M)"] \arrow[dr, "\rho(A)\otimes 1"'] & & A \otimes (I \otimes M) \arrow[dl, "1\otimes\eta(M)"] \\
& A \otimes M &
\end{tikzcd}$$

Eine $\mathcal{C}$-Kategorie heißt *strikt*, wenn die Morphismen β, η Identitäten sind.

Seien $(\mathcal{D}, \otimes)$ und $(\mathcal{D}', \otimes)$ $\mathcal{C}$-Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ zusammen mit einer natürlichen Transformation $\zeta(A, M) : A \otimes \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(A \otimes M)$ heißt *schwacher* $\mathcal{C}$-*Funktor*, wenn die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes \mathcal{F}(M) \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[d, "\beta"'] & & \mathcal{F}((A \otimes B) \otimes M) \arrow[d, "\mathcal{F}(\beta)"] \\
A \otimes (B \otimes \mathcal{F}(M)) \arrow[r, "1\otimes\zeta"] & A \otimes \mathcal{F}(B \otimes M) \arrow[r, "\zeta"] & \mathcal{F}(A \otimes (B \otimes M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \otimes \mathcal{F}(M) \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \mathcal{F}(I \otimes M) \arrow[dl, "\mathcal{F}(\eta)"] \\ & \mathcal{F}(M) & \end{tikzcd}$$

Wenn zusätzlich ζ Isomorphismus ist, dann nennen wir $\mathcal{F}$ einen $\mathcal{C}$-Funktor. Der Funktor heißt *strikter $\mathcal{C}$-Funktor*, wenn ζ der Identitäts-Morphismus ist. Eine natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ zwischen (schwachen) $\mathcal{C}$-Funktoren heißt eine *$\mathcal{C}$-Transformation*, wenn

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathcal{F}(M) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "1_A \otimes \varphi(M)"'] & \mathcal{F}(A \otimes M) \arrow[d, "\varphi(A \otimes M)"] \\ A \otimes \mathcal{F}'(M) \arrow[r, "\zeta'"'] & \mathcal{F}'(A \otimes M) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 10.15. Sei C eine Koalgebra und $\mathcal{C} :=$ Vek. Dann ist die Kategorie $\mathcal{M}^C$ der Rechts-C-Komoduln eine $\mathcal{C}$-Kategorie, denn mit $N \in \mathcal{M}^C$ und $V \in \mathcal{C} =$ Vek ist auch $V \otimes N$ ein Komodul vermöge der Komodul Struktur von N.
Der Vergißfunktor $\omega : \mathcal{M}^C \longrightarrow$ Vek ist ein strikter $\mathcal{C}$-Funktor, weil $V \otimes \omega(N) = \omega(V \otimes N)$ gilt. Ebenso ist $\omega \otimes M : \mathcal{M}^C \longrightarrow$ Vek ein $\mathcal{C}$-Funktor wegen $V \otimes (\omega(N) \otimes M) \cong \omega(V \otimes N) \otimes M$.

Lemma 10.16. *Sei C eine Koalgebra. Sei $\omega : \mathcal{M}^C \longrightarrow$ Vek der Vergißfunktor. Sei $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes M$ eine natürliche Transformation. Dann ist φ eine $\mathcal{C}$-Transformation.*

Beweis. Es genügt für einen beliebigen Komodul N zu zeigen $1_V \otimes \varphi(N) = \varphi(V \otimes N)$. Wir zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \otimes N \arrow[r, "\varphi(V \otimes N)"] \arrow[d, "1"'] & V \otimes N \otimes M \arrow[d, "1"] \\ V \otimes N \arrow[r, "1_V \otimes \varphi(N)"'] & V \otimes N \otimes M \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dazu sei (v_i) eine Basis von V. Für einen beliebigen Vektorraum W seien die Projektionen $p_i : V \otimes W \longrightarrow W$ definiert durch $p_i(v) = p_i(\sum_j v_j \otimes w_j) = w_i$, wobei $\sum_j v_j \otimes w_j$ die eindeutige Darstellung eines beliebigen Tensors in $V \otimes W$ ist. Damit gilt

$$t = \sum_i v_i \otimes p_i(t)$$

für alle $t \in V \otimes W$. Wir fassen jetzt $V \otimes N$ vermöge der Komodulstruktur von N als Komodul auf. Dann sind die $p_i : V \otimes N \longrightarrow N$ Komodulhomomorphismen. Also kommutieren alle Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \otimes N \arrow[r, "\varphi(V \otimes N)"] \arrow[d, "p_i"'] & V \otimes N \otimes M \arrow[d, "p_i"] \\ N \arrow[r, "\varphi(N)"'] & N \otimes M. \end{tikzcd}$$

In Formeln heißt das $\varphi(N)p_i(t) = p_i\varphi(V \otimes N)(t)$ für alle $t \in V \otimes N$, also gilt

$$\begin{aligned} (1_V \otimes \varphi(N))(t) &= (1_V \otimes \varphi(N))(\sum v_i \otimes p_i(t)) = \sum v_i \otimes \varphi(N)p_i(t) \\ &= \sum_i v_i \otimes p_i\varphi(V \otimes N)(t) = \varphi(V \otimes N)(t) \end{aligned}$$

und damit wie behauptet $1_V \otimes \varphi(N) = \varphi(V \otimes N)$. $\square$

Wir beweisen den folgenden Satz nur in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathrm{Vek}$ der Vektorräume. Es gilt jedoch allgemeiner, daß in einer beliebigen symmetrischen monoidalen Kategorie $\mathcal{C}$ die Koalgebra C den Funktor $\mathcal{C}\text{-}\mathrm{Nat}(\omega, \omega \otimes M) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, M)$ der natürlichen $\mathcal{C}$-Transformationen darstellt.

Satz 10.17. (Rekonstruktion) *Sei C eine Koalgebra. Sei $\omega : \mathcal{M}^C \longrightarrow$ Vek der Vergißfunktor. Dann ist $C \cong \mathrm{coend}(\omega)$.*

Beweis. Seien M in Vek und eine natürliche Transformation $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes M$ gegeben. Wir definieren den Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : C \longrightarrow M$ durch $\widetilde{\varphi} = (\varepsilon \otimes 1)\varphi(C)$, da ja C ein Komodul ist.
Sei nun N ein C-Komodul. Dann ist N durch $\delta : N \longrightarrow N \otimes C$ ein Unterkomodul von $N \otimes C$, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & N \otimes C \arrow[d, "1 \otimes \Delta"] \\ N \otimes C \arrow[r, "\delta \otimes 1"'] & N \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

kommutiert. Damit ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi(N)"'] & N \otimes C \arrow[d, "\varphi(N\otimes C)=1_N\otimes\varphi(C)"] \arrow[ddr, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] & \\
N \otimes M \arrow[r, "\delta\otimes 1"] \arrow[drr, "1"'] & N \otimes C \otimes M \arrow[dr, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] & \\
 & & N \otimes M
\end{tikzcd}$$

Insbesondere haben damit gezeigt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \omega \otimes C \arrow[d, "1\otimes\widetilde{\varphi}"] \\
 & \omega \otimes M
\end{tikzcd}$$

kommutiert.
Um die Eindeutigkeit von $\widetilde{\varphi}$ zu zeigen, sei $g : C \longrightarrow M$ ein weiterer Homomorphismus mit $(1 \otimes g)\delta = \varphi$. Für $c \in C$ ist $g(c) = g(\varepsilon \otimes 1)\Delta(c) = (\varepsilon \otimes 1)(1 \otimes g)\Delta(c) = (\varepsilon \otimes 1)\varphi(C)(c) = \widetilde{\varphi}(c)$.
Die Koalgebrenstruktur wie in Folgerung 10.4 angegeben ist die ursprünglich vorgegebene auf C. Das sieht man so. Die Komultiplikation $\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes C$ ist eine natürliche Transformation, also auch $(\delta \otimes 1_C)\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes C \otimes C$. Damit wird genau wie in Folgerung 10.4 genau ein Homomorphismus $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ induziert, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
\omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[r, "\delta\otimes 1"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \otimes \mathrm{coend}(\omega)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ebenso induziert der natürliche Isomorphismus $\omega \cong \omega \otimes \mathbb{K}$ genau einen Homomorphismus $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_\omega"'] & \omega \otimes \mathrm{coend}(\omega) \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
 & \omega \otimes I
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Das müssen aber dann wegen der Eindeutigkeit die Strukturmorphismen von C sein. $\square$

Wir beweisen jetzt auch den endlich dimensionalen Fall der Rekonstruktion. Dazu zeigen wir zunächst den Fundamentalsatz für Komoduln.

Satz 10.18. (Fundamentalsatz für Komoduln) *Sei C eine Koalgebra, M ein C-Komodul und $m \in M$. Dann gibt es eine endlich dimensionale Unterkoalgebra $E \subseteq C$ und einen endlich dimensionalen E-Komodul N mit $m \in N$, so daß der durch $E \subseteq C$ induzierte C-Komodul $N \longrightarrow N \otimes E \longrightarrow N \otimes C$ ein C-Unterkomodul von M ist.*

Beweis. Sei $\delta(m) = \sum_{j=1}^n m_j \otimes c_j$ eine Darstellung des Tensors $\delta(m)$ von kürzester Länge, d.h. mit einer Minimalanzahl von Summanden. Dann sind die $c_1, \ldots, c_n$ linear unabhängig und die $m_1, \ldots, m_n$ linear unabhängig.
Seien $\delta(m_j) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes c_{ij}$ und $\Delta(c_i) = \sum_{j=1}^s c'_{ij} \otimes c_j$ mit geeigneten linear unabhängigen $m_1, \ldots, m_n, \ldots, m_r$ bzw. $c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_s$.
Wegen $\sum_{j=1,\ldots,n;i} m_i \otimes c_{ij} \otimes c_j = \sum_j \delta(m_j) \otimes c_j = \sum_i m_i \otimes \Delta(c_i) = \sum_{i=1,\ldots,n;j} m_i \otimes c'_{ij} \otimes c_j$ ist $c_{ij} = c'_{ij}$ für alle i, j und $c_{ij} = 0$ für $i, j > n$.
Wir diagonalisieren nochmals und erhalten $\sum_{jk} m_j \otimes \Delta(c_{ij}) \otimes c_k = \sum_{ijk} m_i \otimes c_{ij} \otimes c_{jk} \otimes c_k$ und damit $\Delta(c_{ik}) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \otimes c_{jk}$. Damit ist der von den c_{ij} aufgespannte Unterraum eine Unterkoalgebra E von C.
Wegen $\delta(m_j) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes c_{ij}$ ist der von den $m_1, \ldots, m_n$ aufgespannte lineare (n-dimensionale) Unterraum ein E-Komodul.
Dann folgt aus $\Delta(c_i) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \otimes c_j$ wegen der Rechengesetze in Koalgebren $c_i = \sum c_{ij}\varepsilon(c_j) \in E$. Wir verwenden $\delta(m) = \sum_{j=1}^n m_j \otimes c_j$ und erhalten $m = \sum_j m_j \varepsilon(c_j)$. Damit ist $m \in N$. □

Satz 10.19. (Rekonstruktion) *Sei C eine Koalgebra. Sei $\mathcal{M}_0^C$ die Kategorie der endlich dimensionalen C-Komoduln und $\omega : \mathcal{M}_0^C \longrightarrow \mathrm{Vek}$ der Vergißfunktor. Dann ist $C \cong \mathrm{coend}(\omega)$.*

Beweis. Seien M in Vek und eine natürliche Transformation $\varphi : \omega \longrightarrow \omega \otimes M$ gegeben. Wir definieren den Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : C \longrightarrow M$ wie folgt. Sei $c \in C$ gegeben. Sei N ein endlich dimensionaler C-Unterkomodul von C mit $c \in N$. Dann definieren wir $g(c) := (\varepsilon|_N \otimes 1)\varphi(N)(c)$. Ist N' ein weiterer endlich dimensionaler Unterkomodul von C mit $c \in N'$ und mit $N \subseteq N'$, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi(N)"] \arrow[dd] & N \otimes M \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
& & C \otimes M \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"] & M \\
N' \arrow[r, "\varphi(N')"] & N' \otimes M \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Damit ist die Definition von $\widetilde{\varphi}(c)$ unabhängig von der Wahl von N. Weiter ist $\widetilde{\varphi} : N \longrightarrow M$ offenbar linear. Für je zwei Elemente $c, c' \in C$ gibt es einen endlich dimensionalen Unterkomodul $N \subseteq C$ mit $c, c' \in N$, z.B. die Summe von für c und c' einzeln gefundenen Unterkomoduln. Damit läßt sich $\widetilde{\varphi}$ auf ganz C fortsetzen.
Der übrige Beweis verläuft im wesentlichen wie der Beweis des ersten Rekonstruktionssatzes. $\square$

Man kann weitere Struktur der Koalgebra aus den Darstellungen zurückerhalten.
Dauz beweisen wir zum Abschluß einen Rekonstruktionssatz über Bialgebren. Wir erinnern uns, daß für eine Bialgebra B die Kategorie der B-Komoduln monoidal ist. Weiter wissen wir, daß der Vergißfunktor $\omega : \mathcal{M}^B \longrightarrow \mathrm{Vek}$ ein monoidaler Funktor ist. Aus dieser Information läßt sich die Bialgebrenstruktur von $\mathbb{B}$ zurückgewinnen. Genauer gilt

Satz 10.20. *Sei B eine Koalgebra. Sei $\mathcal{M}^B$ eine monoidale Kategorie, so daß der Vergißfunktor $\omega : \mathcal{M}^B \longrightarrow$ Vek ein monoidaler Funktor ist. Dann gibt es genau eine Bialgebrenstruktur auf B, die die angegebenen monoidalen Strukturen induziert.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit der Multiplikation $\nabla : B \otimes B \longrightarrow B$ und der Einheit $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow B$. Die natürliche Transformation $\delta : \omega \longrightarrow \omega \otimes B$ wird mit $\nabla : B \otimes B \longrightarrow B$ und $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow B$ eine monoidale natürliche Transformation. Wir zeigen, daß ∇ und η durch ω und δ eindeutig bestimmt sind.
Dazu seien $\nabla' : B \otimes B \longrightarrow B$ und $\eta' : B \longrightarrow \mathbb{K}$ Morphismen, die δ zu einer monoidalen natürlichen Transformation machen. Die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[r, "\delta(X)\otimes\delta(Y)"] \arrow[d, "\rho"] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes B \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes\nabla'"] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\delta(X\otimes Y)"] & \omega(X \otimes Y) \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "1 \otimes \eta'"] \\
\omega(\mathbb{K}) \arrow[r, "\delta(\mathbb{K})"] & \omega(\mathbb{K}) \otimes B
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Insbesondere kommutieren dann

$$\begin{tikzcd}
\omega(B) \otimes \omega(B) \arrow[r, "\delta(B)\otimes\delta(B)"] \arrow[d, "\rho"] & \omega(B) \otimes \omega(B) \otimes B \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes\nabla'"] \\
\omega(B \otimes B) \arrow[r, "\delta(B\otimes B)"] & \omega(B \otimes B) \otimes B
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "1 \otimes \eta'"] \\
\omega(\mathbb{K}) \arrow[r, "\delta(\mathbb{K})"] & \omega(\mathbb{K}) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Es gelten also $\sum b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)} = \sum b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes \nabla'(b_{(2)} \otimes c_{(2)})$ und $1 \otimes 1 = 1 \otimes \eta'(1)$. Es folgt $bc = \sum \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(c_{(1)}) b_{(2)} c_{(2)} = \sum \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(c_{(1)}) \nabla'(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) = \nabla'(b \otimes c)$ und $1 = \eta'(1)$.
Wir kommen zum Existenzbeweis. Sei B lediglich eine Koalgebra, und sei $\omega : \mathcal{M}^B \longrightarrow \mathrm{Vek}$ ein monoidaler Funktor mit $\xi : \omega(M) \otimes \omega(N) \longrightarrow \omega(M \otimes N)$ und $\xi_0 : \mathbb{K} \longrightarrow \omega(\mathbb{K})$. Wir beachten zunächst, daß das neue Tensorprodukt zwischen den Komoduln M und N auf den unterliegenden Vektorräumen mit dem Tensorprodukt dieser Vektorräume (bis auf Isomorphie ξ) übereinstimmt. Wegen der Kohärenzsätze für monoidale Kategorien (die auch in dieser Situation gelten), identifizieren wir entlang ξ und ebenso entlang ξ_0.
Wir definieren $\eta := (\mathbb{K} \xrightarrow{\delta(\mathbb{K})} \mathbb{K} \otimes B \cong B)$ und $\nabla := (B \otimes B \xrightarrow{\delta(B\otimes B)} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1_B} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes B \cong B)$.
Da der Komodul-Struktur-Morphismus $\delta : M \longrightarrow M \otimes B$ ein Komodul Homomorphismus ist, wobei die Komodulstruktur auf $M \otimes B$ nur durch die Diagonale auf B gegeben ist – das ist die $\mathcal{C}$-Struktur auf $\omega : \mathcal{M}^B \longrightarrow \mathrm{Vek}$ –, ist auch $\delta(M) \otimes \delta(N) : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes B$ ein Komodul Homomorphismus. Also kommutiert das erste Quadrat im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "\delta(M)\otimes\delta(N)"] \arrow[d, "\delta(M\otimes N)"'] & M \otimes B \otimes N \otimes B \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] \arrow[d, "\delta(M\otimes B\otimes N\otimes B)"'] & M \otimes N \otimes B \otimes B \arrow[d, "1\otimes 1\otimes\delta(B\otimes B)"'] \\
M \otimes N \otimes B \arrow[r, "\delta(M)\otimes\delta(N)\otimes 1_B"] & M \otimes B \otimes N \otimes B \otimes B \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1\otimes 1"] & M \otimes N \otimes B \otimes B \otimes B
\end{tikzcd}$$

Das zweite Quadrat kommutiert ebenso, da die Komodulstruktur auf $M \otimes B$ bzw. $N \otimes B$ nur durch die Diagonale auf B gegeben ist, also $M \otimes N$ aus der natürlichen ($\mathcal{C}$-)Transformation ausgeklammert werden dürfen. Wir schlie'sen jetzt

$$1_M \otimes 1_N \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes 1_B : M \otimes N \otimes B \otimes B \otimes B \longrightarrow M \otimes N \otimes B$$

an dieses kommutative Rechteck an und erhalten $\delta(M \otimes N) = (1_M \otimes 1_N \otimes \nabla)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\delta(M) \otimes \delta(N)$. Damit wird die Komodulstruktur auf $M \otimes N$ durch die oben definierte Multiplikation $\nabla : B \otimes B \longrightarrow B$ induziert.

Nun kommutieren die folgenden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "1_B\otimes 1_B"] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[rr, "1\otimes\tau\otimes 1"] & & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "1\otimes\nabla"] \\
B \otimes B \arrow[rrr, "\delta(B\otimes B)"] \arrow[dd, "\nabla"'] \arrow[dr, "\delta(B\otimes B)"] & & & B \otimes B \otimes B \arrow[dd, "\nabla\otimes 1"] \arrow[dl, "\delta(B\otimes B)\otimes 1"'] \\
& B \otimes B \otimes B \arrow[r, "1\otimes 1\otimes\Delta"] \arrow[dl, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1"] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1\otimes 1"'] & \\
B \arrow[rrr, "\Delta"] & & & B \otimes B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dd, "1"'] \arrow[dr, "\delta(B\otimes B)"] & & B \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& B \otimes B \otimes B \arrow[ur, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1"] \arrow[dl, "1\otimes 1\otimes\varepsilon"] & \\
B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rrr, "\eta"] \arrow[drr, "\delta(\mathbb{K})"] \arrow[ddr, "\delta(\mathbb{K})"] \arrow[ddd, "\eta"'] & & & B \arrow[dd, "\Delta"] \\
& & \mathbb{K}\otimes B \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[d, "1\otimes\Delta"] & \\
& \mathbb{K}\otimes B \arrow[r, "\delta(\mathbb{K})\otimes 1"] \arrow[dl, "\cong"] \arrow[dr, "\eta\otimes 1"] & \mathbb{K}\otimes B\otimes B \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & B\otimes B \arrow[dl, "1_B"] \\
B \arrow[rr, "\eta\otimes 1"] & & B\otimes B &
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\delta(\mathbb{K})"] \arrow[ddr, "\eta"'] & & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K}\otimes B \arrow[ur, "1\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\cong"] & \\
& B \arrow[uur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Damit sind η und ∇ Koalgebren Homomorphismen.
Um die Assoziativität von ∇ zu zeigen, identifizieren wir entlang der Abbildungen $\alpha : (M\otimes N)\otimes P \cong M\otimes(N\otimes P)$ und vereinfachen weiterhin das zu betrachtende Diagramm, indem wir festlegen, daß σ eine geeignete Vertauschung (Permutation) von Tensorfaktoren darstellt. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\sigma(\delta(B)\otimes\delta(B)\otimes\delta(B))"] \arrow[d, "1"] & B\otimes B\otimes B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1"] \arrow[d, shift right, "1\otimes(\nabla\otimes 1)"'] \arrow[d, shift left, "1\otimes(1\otimes\nabla)"] & B\otimes B\otimes B \arrow[d, shift right, "\nabla\otimes 1"'] \arrow[d, shift left, "1\otimes\nabla"] \\
B\otimes B\otimes B \arrow[r, shift left, "\sigma(\delta(B\otimes B)\otimes\delta(B))"] \arrow[r, shift right, "\sigma(\delta(B)\otimes\delta(B\otimes B))"'] \arrow[d, "1"] & B\otimes B\otimes B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\nabla"] & B\otimes B \arrow[d, "\nabla"] \\
B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\delta(B\otimes B\otimes B)"] & B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes 1"] & B
\end{tikzcd}$$

Da die obere Zeile die Identität ist, gilt das Assoziativgesetz.

Für den Beweis der Einseigenschaft von η müssen wir die Kohärenzmorphismen λ und ρ explizit mit betrachten. Aus Symmetrioegründen zeigen wir nur eines Hälte des Einsaxioms. Dieses folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\delta(B)"] \arrow[d, "\rho^{-1}"] & B \otimes B \arrow[r, "\rho^{-1}"] & B \otimes B \otimes \mathbb{K} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes \delta(\mathbb{K})"] & & B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes \eta"] & B \arrow[d, "1 \otimes \eta"] \\
B \otimes \mathbb{K} \arrow[urr, "\delta(B) \otimes 1"] \arrow[rr, "\delta(B) \otimes \delta(\mathbb{K})"] \arrow[d, "="] & & B \otimes B \otimes \mathbb{K} \otimes B \arrow[r, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & B \otimes \mathbb{K} \otimes B \otimes B \arrow[r, "\rho \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes \nabla"] & B \otimes B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[dd, "1 \otimes \nabla"] & B \otimes B \arrow[dd, "\nabla"] \\
B \otimes \mathbb{K} \arrow[rrr, "\delta(B \otimes \mathbb{K})"] \arrow[d, "\rho"] & & & B \otimes \mathbb{K} \otimes B \arrow[dr, "\rho \otimes 1"] & & \\
B \arrow[rrrr, "\delta(B)"] & & & & B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1"] & B
\end{tikzcd}$$

□