Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 11

Kategorientheorie

41. (a) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ein kovarianter Funktor. Es gelte $\mathcal{F}(Y) := \{*\}$ für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$. Für ein Objekt X in $\mathcal{C}$ und $* \in F(X)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
    (i) $(X, *)$ ist ein universelles Element für $\mathcal{F}$.
    (ii) X ist ein Anfangsobjekt in $\mathcal{C}$.

    (b) Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor. Es gelte $\mathcal{F}(Y) := \{*\}$ für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$. Für ein Objekt X in $\mathcal{C}$ und $* \in F(X)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
    (i) $(X, *)$ ist ein universelles Element für $\mathcal{F}$.
    (ii) X ist ein Endobjekt in $\mathcal{C}$.

42. Zeigen Sie, dass die Kategorie der Monoide Mon-$\mathcal{C}$ in der Kategorie $\mathcal{C} :=$ Mon der (mengentheoretischen oder abstrakten) Monoide die Kategorie der kommutativen Monoide in $\mathcal{C}$ ist.

43. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist $\mathrm{Mor}(A, \text{-})$ auf nat:urliche Weise ein Funktor von $\mathcal{C}$ in die Kategorie der (abelschen) Gruppen. Nach Satz 2.11.6 muss daher A eine Kogruppe in $\mathcal{C}$ sein. Bestimmen Sie das Koprodukt in $\mathcal{C}$, das Anfangsobjekt 1 in $\mathcal{C}$ und sodann explizit die Komultiplikation $\delta : A \longrightarrow A \coprod A$, die Koeinheit $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbf{1}$ und die Koinverse $\sigma : A \longrightarrow A$.

44. Wenn

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt ist, dann ist f ein Monomorphismus.

Abgabe: Freitag, 16.7.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.