Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 4

Kategorientheorie

13. (a) Sei $f : A \to B$ ein Morphismus in der Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, \text{-})$ mit

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, \text{-})_C = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, C) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni g \mapsto g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

eine natürliche Transformation von kovarianten Funktoren ist.

(b) Sei $f : A \to B$ ein Morphismus in der Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{-}, f)$ mit

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A) \ni g \mapsto f \circ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B)$$

eine natürliche Transformation von kontravarianten Funktoren ist.

14. Für einen K-Vektorraum V definieren wir den *Dualraum* als $V^* := \mathrm{Mor}_K(V, K)$. Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sei die *duale Abbildung* definiert durch

$$f^* : W^* \ni \varphi \mapsto \varphi \circ f \in V^*.$$

(a) Zeigen Sie, dass $D : \mathrm{Vek}_{ed} \to \mathrm{Vek}_{ed}$ mit $D(V) := V^*$ und $D(f) := f^*$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume in sich ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine Familie von Isomorphismen

$$(\alpha_V : V \to V^* | V \in \mathrm{Ob}(Vek_{ed})),$$

so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_V"'] & W \arrow[d, "\alpha_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

für alle linearen Abbildungen $f : V \to W$ kommutieren.

15. (a) Zeigen Sie, dass der universelle Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}_! : \mathbf{Men} \to \mathbf{Men}$ ein Funktor ist. Dabei sei $\mathcal{P}_!(S) = \mathcal{P}S$ die Potenzmenge von S. Weiter sei für eine Abbildung $f : S \to T$

$$\mathcal{P}_!(f) = f_! : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T,$$
$$f_!(A_0) = \{y \in B | f^{-1}(\{y\}) \subseteq A_0\}.$$

(b) Zeigen Sie, das die Konstruktion des *direkten Bildes* $\mathcal{P}_*$: **Men** $\to$ **Men** ein Funktor ist. Dabei sei $\mathcal{P}_*(S) = \mathcal{P}S$ die Potenzmenge von S. Weiter sei für eine Abbildung $f : S \to T$

$$\mathcal{P}_*(f) = f_* : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T,$$
$$f_*(A_0) = \{f(x) \in B | x \in A_0\}.$$

16. Sei A eine Menge und A^* ihr Kleene Abschluss. Die Elemente von A^* können als *Listen* von Elementen aus A aufgefaßt werden. Man kann den Kleene Abschluss zweimal anwenden und erhält A^{**}. Ein Element von A^{**} ist dann eine Liste von Listen. Die Operation des *Glättens* ist eine Abbildung von A^{**} nach A^*, die die Listen in einer Liste von Listen zusammenhängt. Z.B. ist für $A = \{a, b\}$ das Element $w = ((a, b), (b, b, a), (), (a))$ eine Element von A^{**}. Das Glätten ergibt

$$\text{glätten}_A(w) = (a, b, b, b, a, a).$$

Zeigen Sie, dass -* und -** Funktoren sind und dass das Glätten

$$\text{glätten} : \text{-}^{**} \to \text{-}^*$$

eine natürliche Transformation ist.

Abgabe: Freitag, 21.5.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.