Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 8

Algebra II

29. Das zwölfte Kreisteilungspolynom ist das Polynom

$$\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

Es ist laut Vorlesung irreduzibel. Zeigen Sie, daß seine Reduktion bezüglich einer beliebigen Primzahl p, also dasselbe Polynom als Element von $\mathbb{Z}_p[x]$, reduzibel ist.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 24 von Blatt 6). (6)

30. Sei p eine ungerade Primzahl. Für eine ganze Zahl n, die nicht durch p teilbar ist, definieren wir das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{n}{p}\right) := \begin{cases} 1: & n \equiv m^2 \pmod{p} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \\ -1: & n \not\equiv m^2 \pmod{p} \text{ für alle } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ist n durch p teilbar, so sei das Legendre-Symbol $\left(\frac{n}{p}\right) = 0$. Zeigen Sie:

(a) $\left(\dfrac{n}{p}\right) \equiv n^{(p-1)/2} \pmod{p}$

(b) $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$

(Hinweis: Beachten Sie den kleinen Fermatschen Satz.) (6)

31. Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, daß der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}_p$ genau einen quadratischen Unterkörper, also einen Körper der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für eine quadratfreie ganze Zahl d, enthält.
(Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 28 von Blatt 7. Betrachten Sie die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}_p$ über $\mathbb{Q}$.) (4)

32. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel und

$$\tau := \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{n}{5}\right) \zeta^n = \zeta - \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4$$

Zeigen Sie:

(a) $\tau^2 = 5$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}_5$

(Hinweis: Die Definition von τ läßt sich leicht auf allgemeine Primzahlen verallgemeinern, und man kann ähnlich zeigen, daß der eindeutige quadratische Unterkörper von $\mathbb{Q}_p$ der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})$ ist.)(4)

Abgabe: Dienstag, 10.6.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.