Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 7

Algebra II

25. Sei G eine Gruppe und M eine abelsche Gruppe. $\rho : G \to \mathrm{Aut}(M)$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Wir schreiben abkürzend $g.m := \rho(g)(m)$. Betrachten Sie die Abbildungen

$$d^0 : M \to \mathrm{Abb}(G, M),\ m \mapsto d^0(m)$$

mit $d^0(m)(g) := g.m - m$, und

$$d^1 : \mathrm{Abb}(G, M) \to \mathrm{Abb}(G \times G, M),\ f \mapsto d^1(f)$$

mit $d^1(f)(g_1, g_2) := g_1.f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$.

   (a) Zeigen Sie, daß $d^1 \circ d^0 = 0$ ist.

   (b) Sei $Z^1(G, M) := \mathrm{Ke}(d^1)$ und $B^1(G, M) := \mathrm{Bi}(d^0)$. Zeigen Sie, daß $B^1(G, M) \subset Z^1(G, M)$ ist.

   (Bemerkung: Die zugehörige Faktorgruppe $Z^1(G, M)/B^1(G, M)$ wird meist mit $H^1(G, M)$ bezeichnet.) (4)

26. Sei $K \subset L$ eine Galoiserweiterung vom Grad n und $G := \mathrm{Aut}(L/K)$. Da ein Automorphismus von Null verschiedene Elemente auf von Null verschiedene Elemente abbildet, erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}(L^*)$. Zeigen Sie: $H^1(G, L^*) = 1$.
   (Hinweis: Dabei stammen die Bezeichnungen aus Aufgabe 25. Beachten Sie, daß M dort additiv geschrieben wurde, $L^* = L \setminus \{0\}$ aber multiplikativ geschrieben wird.) (6)

27. Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. (Aus den Aufgaben des Staatsexamens 1982.) (6)

28. Sei $\mathbb{Q} \subset K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Zeigen Sie, daß es genau eine quadratfreie ganze Zahl d gibt, so daß $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist. (Hinweis: Eine Zahl heißt quadratfrei, wenn ihre Primfaktoren alle verschieden sind. Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe 6 auf Blatt 2 der Übungsaufgaben zur Vorlesung „Algebra I".) (Aus den Aufgaben des Staatsexamens 1982.) (4)

Abgabe: Dienstag, 3.6.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.