Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 6

Algebra II

21. Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_4 in vier Buchstaben. Zeichnen Sie alle diese Untergruppen in ein Diagramm ein, aus dem hervorgeht, welche Untergruppen ineinander enthalten sind. Entscheiden Sie von jeder Untergruppe, ob sie als Galoisgruppe eines irreduziblen separablen Polynoms vom Grad 4 auftreten kann oder nicht. (Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 23 von Blatt 6 der Vorlesung „Algebra I".) (6)

22. Seien u_1, u_2, u_3, u_4 die Nullstellen eines irreduziblen separablen Polynoms vom Grad 4 in seinem Zerfällungskörper. Seien

$$\alpha := u_1u_2 + u_3u_4 \quad \beta := u_1u_3 + u_2u_4 \quad \gamma := u_1u_4 + u_2u_3$$

die Nullstellen der kubischen Resolvente. Zeigen Sie für ein Element σ der Galoisgruppe des Polynoms, daß σ genau dann in der Kleinschen Vierergruppe enthalten ist, wenn

$$\sigma(\alpha) = \alpha \quad \sigma(\beta) = \beta \quad \sigma(\gamma) = \gamma$$

gilt. (Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, daß jedes von Eins verschiedene Element von S_4 entweder eine Transposition, ein Produkt von zwei disjunkten Transpositionen, ein 3-Zykel oder ein 4-Zykel ist. Die Aussage wurde in Lemma 11.12 der Vorlesung teilweise gezeigt.) (4)

23. Zeigen Sie:

    (a) Die Galoisgruppe des Polynoms $p_1(x) := x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist isomorph zu S_4.

    (b) Die Galoisgruppe des Polynoms $p_2(x) := x^4 + 8x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ ist isomorph zu A_4.

    (c) Die Galoisgruppe des Polynoms $p_3(x) := x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. (4)

24. Sei K ein endlicher Körper mit d Elementen, und $\mathrm{char}(K)$ sei kein Teiler von n. Man zeige:

(a) $[K_n : K] = \mathrm{ord}(\bar{d})$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}/(n))^*$.

(b) Genau dann ist $\Phi_n \in K[X]$ irreduzibel, wenn $\bar{d}$ ein erzeugendes Element der Gruppe $(\mathbb{Z}/(n))^*$ ist. (6)

Abgabe: Dienstag, 27.5.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.