Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 5

Algebra II

17. Sei G eine endliche Gruppe, N ein Normalteiler von G und P eine p-Sylowuntergruppe von N. Zeigen Sie, daß $G = NN_G(P)$ ist. (4)

18. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, die mit 1 beginnt. Die Möbiusfunktion $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist folgendermaßen definiert: Ist $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ die Primfaktorzerlegung von n, so ist

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & : p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ sind alle verschieden} \\ 0 & : p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ sind nicht alle verschieden} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Möbiusfunktion ist multiplikativ, d. h. wir haben $\mu(1) = 1$ und $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$, wenn m und n teilerfremd sind.

(b) Ist A eine abelsche Gruppe und sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Elementen aus A mit der Eigenschaft, daß

$$b_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m/n}}^{n} a_m$$

ist, so gilt

$$a_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m/n}}^{n} \mu(n/m) b_m$$

(4)

19. Sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$ und μ die Möbiusfunktion. Leiten Sie folgende Formeln her:

(a) $\Phi_n(t) = \prod_{m/n} (t^m - 1)^{\mu(n/m)}$

(b) Sei $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verschieden sind. Setze $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Zeigen Sie, daß $\Phi_n(t) = \Phi_m(t^{n/m})$ gilt.

(c) Der konstante Term des Kreisteilungspolynoms ist

$$\Phi_n(0) = \begin{cases} -1 & : n = 1 \\ 1 & : n \neq 1 \end{cases}$$

(6)

20. Betrachten Sie die Potenzsummen S_k und die elementarsymmetrischen Funktionen C_k aus Beispiel 10.6. Zeigen Sie die Newtonschen Formeln

$$S_j + \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i C_i S_{j-i} + (-1)^j j C_j = 0$$

für $j = 0, \ldots, n$.
(Hinweis: Wenden Sie auf das Polynom

$$\prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_{n-j}(x_1, \ldots, x_n) x^j$$

in dem Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n, x]$ den formalen Differentialoperator $\Delta_j = x^{j+1} \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+1} \frac{\partial}{\partial x_i}$ an und differenzieren Sie die linke Seite gemäß der Produktregel und die rechte Seite explizit. Vergleichen Sie dann die Koeffizienten von x^n in beiden Termen.) (6)

Abgabe: Dienstag, 21.5.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.