Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 4

Algebra II

13. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

    (a) $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})| = p(p-1)$

    (b) Ist $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ ein Element der Ordnung p, so ist φ eine Potenz der Abbildung
    $$\mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2},\ \bar{i} \mapsto \overline{(p+1)i}$$

    (Hinweis: Man konstruiere einen Isomorphismus zwischen $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$ und der Gruppe $\mathbb{Z}_{p^2}^{\times}$ der invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_{p^2}$. Beachte Aufgabe 7). (4)

14. Sei p eine ungerade Primzahl und G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3, die ein Element der Ordnung p^2 enthält.

    (a) Man zeige, daß die von diesem Element erzeugte Untergruppe normal ist.

    (b) Man zeige, daß es ein Element der Ordnung p gibt, das nicht in dieser Untergruppe liegt.

    (c) Man zeige, daß G zu der Gruppe G_1 aus Aufgabe 7 isomorph ist. (6)

15. Sei $M(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in dem Körper $\mathbb{F}_3$.

    (a) Man zeige, daß es in diesem Ring eine invertierbare Matrix M der Ordnung 8 gibt.

    (b) Man zeige weiter, daß $\{0, E, M, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6, M^7\}$ ein Körper ist, wobei die Operationen von $M(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ induziert sind.

    (Aus den Aufgaben des Staatsexamens 2002.) (4)

16. Sei $R = \mathbb{Z}[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

   (a) Sei $m \subset R$ ein maximales Ideal von R. Zeigen Sie, daß $m \cap \mathbb{Z}$ ein maximales Ideal von $\mathbb{Z}$ ist.

   (b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

   (c) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale von R.

   (Aus den Aufgaben des Staatsexamens 2002). (6)

Abgabe: Dienstag, 13.5.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.