Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 3

Algebra II

9. Für eine Gruppe G definiert man die aufsteigende Zentralreihe
$$\{e\} = Z_0(G) \subset Z_1(G) \subset Z_2(G) \subset Z_3(G) \subset \ldots$$
rekursiv durch $Z_1(G) = Z(G)$, das Zentrum von G, und die Bedingung $Z_{m+1}(G)/Z_m(G) = Z(G/Z_m(G))$. Andererseits ist die absteigende Zentralreihe
$$G = Z^0(G) \supset Z^1(G) \supset Z^2(G) \supset Z^3(G) \supset \ldots$$
definiert durch $Z^{i+1}(G) = [Z^i(G), G]$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Es gibt ein m mit $Z_m(G) = G$.

   (b) Es gibt ein m mit $Z^m(G) = \{e\}$.

   Eine Gruppe mit dieser Eigenschaft nennt man nilpotent. (4)

10. Sei p eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie:

   (a) Ist $H \subset G$ eine echte Untergruppe, so ist H auch echt in ihrem Normalisator
   $$N_G(H) := \{g \in G \mid \forall h \in H: \; ghg^{-1} \in H\}$$
   enthalten.

   (b) Ist H eine maximale Untergruppe von G, also eine echte Untergruppe, die in keiner anderen echten Untergruppe enthalten ist, so ist H ein Normalteiler.

   (Hinweis: Verwenden Sie für den ersten Aufgabenteil Induktion über die Gruppenordnung. Machen Sie sich zunächst klar, daß folgende Aussagen per definitionem richtig sind: Eine Untergruppe ist genau dann ein Normalteiler, wenn ihr Normalisator die ganze Gruppe ist; in ihrem Normalisator ist sie immer ein Normalteiler.) (6)

11. Sei p eine ungerade Primzahl und G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3, in der jedes von Eins verschiedene Element die Ordnung p hat. Zeigen Sie:

    (a) Das Zentrum von G ist zyklisch von der Ordnung p.

    (b) G besitzt einen zu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ isomorphen Normalteiler.

    (c) G ist isomorph zu der Gruppe $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes \mathbb{Z}_p$, die in Aufgabe 7b) beschrieben wurde.

    (Hinweis: Beachten Sie die Aufgaben 27 und 29 von Blatt 7 bzw. 8 der Vorlesung „Algebra I".) (6)

12. Bestimmen Sie, wieviele Elemente der Ordnung 7 es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 168 gibt. (4)

Abgabe: Dienstag, 6.5.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.