Mathematisches Institut **SS 2003**
der Universität München **Blatt 10**
Prof. Dr. B. Pareigis

Algebra II

Auf diesem Aufgabenblatt ist p eine Primzahl. $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet den Körper der p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p$ den Unterring der ganzen p-adischen Zahlen.

37. Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{Q}_p$ heißt offen, wenn es für jedes $x \in O$ ein $r > 0$ gibt, so daß $B(x,r) \subset O$ ist. Dabei ist $B(x,r) = \{y \in \mathbb{Q}_p \mid |x-y| < r\}$. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Zeigen Sie, daß $B(x,r)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist. (4)

38. (a) Stellen Sie das Inverse von $1 - p^n$ als p-adische Zahl dar.

    (b) Sei $r \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, deren Nenner nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie, daß r sich als rationale Zahl mit Nenner $p^n - 1$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ schreiben läßt.

    (c) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß n genau dann in $\mathbb{Z}_p$ invertierbar ist, wenn n nicht durch p teilbar ist. (6)

39. (a) Zeigen Sie, daß das Hauptideal $p\mathbb{Z}_p$ von $\mathbb{Z}_p$, das von p erzeugt wird, das einzige maximale Ideal von $\mathbb{Z}_p$ ist.
    (Hinweis: Zeigen Sie insbesondere, daß dieses Ideal maximal ist.)

    (b) Ist q eine von p verschiedene Primzahl, so ist $\mathbb{Z}_p \not\cong \mathbb{Z}_q$. (4)

40. Sei $a \in \mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie, daß a genau dann eine rationale Zahl ist, wenn die p-adische Darstellung von a periodisch ist. Dabei bedeutet „periodisch“, daß nach einer gewissen Zahl von Stellen, der sog. Vorperiode, ein Block von Stellen kommt, der sich danach immer wiederholt.
    (Hinweis: Zeigen Sie, zuächst, daß sie annehmen können, daß a nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie dann, daß periodische Zahlen rational sind, und versuchen sie daraus die Umkehrung zu erschließen. Beachten Sie Teil b) von Aufgabe 38.) (6)

Abgabe: Dienstag, 1.7.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.