Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 8

Algebra I

29. Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^2. Zeigen Sie, daß
$$G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \quad \text{oder} \quad G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$
ist. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 27). (4)

30. Entscheiden Sie, ob die folgenden Kongruenzen lösbar sind, und geben Sie ggf. eine Lösung an.

    (a) In dem Polynomring $\mathbb{R}[x]$:
    $$p \equiv x^2 \pmod{x^3 + 2x - 1} \qquad p \equiv x \pmod{x^2 + 3}$$

    (b) In den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:
    $$n \equiv 3 \pmod{6} \qquad n \equiv 8 \pmod{15}$$

    (c) In den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:
    $$n \equiv 3 \pmod{9} \qquad n \equiv 6 \pmod{12}$$

    (6)

31. Sei R ein Integritätsring mit einem Element x, das irreduzibel, aber nicht prim ist. Es gibt also zwei Elemente $a, b \in R$ mit der Eigenschaft $x \mid ab$, $x \nmid a$, $x \nmid b$. Dafür zeige man:

    (a) Die Ideale $(x) \cap (a)$ und (x, a) sind keine Hauptideale.

    (b) Das Paar x, a besitzt einen größten gemeinsamen Teiler.

    (c) Das Paar xb, ab besitzt keinen größten gemeinsamen Teiler.

(Hinweis: Dabei heißt d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b, wenn d sowohl Teiler von a als auch Teiler von b ist und jeder andere gemeinsame Teiler auch ein Teiler von d ist.) (6)

32. Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ und $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der sog. Ring der Gaußschen Zahlen. Man zeige, daß

$$2 = (1 + i)(1 - i)$$

die Primfaktorzerlegung von $2 \in R$ ist. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 28). (4)

Abgabe: Dienstag, 14.1.2003, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.