Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 7

Algebra I

25. (a) Seien G und H zwei Gruppen und $\phi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ führen wir eine Multiplikation durch die Vorschrift

$$(g, h)(g', h') = (g\phi(h)(g'), hh')$$

ein. Zeigen Sie, daß $G \times H$ mit dieser Multiplikation zu einer Gruppe wird. Man bezeichnet $G \times H$ mit dieser Multiplikation auch als das semidirekte Produkt von G und H.

(b) Sei G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von N. Es gelte $U \cap N = \{1\}$ und $|G| = |U||N|$. Zeigen Sie, daß durch

$$\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), g \mapsto (n \mapsto gng^{-1})$$

ein Gruppenhomomorphismus definiert wird und daß G zu dem semidirekten Produkt $N \times U$ isomorph ist. (6)

26. Seien p und q zwei Primzahlen mit $p < q$. Wir setzen voraus, daß p ein Teiler von $q - 1$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß es einen Homomorphismus

$$\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)$$

gibt, der nicht konstant gleich der identischen Abbildung von $\mathbb{Z}_q$ ist. Konstruieren Sie damit eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq als semidirektes Produkt.

(b) Zeigen Sie, daß sich jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq isomorph zu einer der oben konstruierten Gruppen ist.

(c) Zeigen Sie, daß je zwei nichtabelsche Gruppen der Ordnung pq isomorph sind.

(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 19.) (6)

27. Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ ihr Zentrum. Zeigen Sie: Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch. (3)

28. Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ und $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

    (a) Man zeige, daß R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

    (b) Betrachte die Abbildung

    $$\delta : R \to \mathbb{N}_0, \ \ a + b\,i \mapsto a^2 + b^2$$

    Man zeige, daß daß (R, δ) ein euklidischer Ring ist.

    (c) Man bestimme die Einheitengruppe R^*. (5)

Abgabe: Dienstag, 7.1.2003, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Wir wünschen allen Vorlesungsteilnehmern fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr.