Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 6

Algebra I

21. Sei X eine beliebige Menge. Auf der Menge
$$F(X) := \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$$
definieren wir eine Multiplikation durch
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_m) := (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$$
Dabei ist $X^0 = Abb(\emptyset, X)$ einelementig; das eindeutig bestimmte Element heißt das leere Wort und ist das neutrale Element bezüglich dieser Verknüpfung. $F(X)$ wird auf diese Weise zu einem Monoid, dem sog. freien Monoid über X. Durch
$$\iota : X \to F(X),\ x \mapsto (x)$$
ist X in $F(X)$ eingebettet. Zeigen Sie: Ist M irgendein Monoid und $f : X \to M$ irgendeine Abbildung, so gibt es genau einen Monoidhomomorphismus $g : F(X) \to M$ mit $g \circ \iota = f$. (5)

22. Seien G und H zwei Gruppen. $E(G \cup H)$ sei die freie Gruppe über der disjunkten Vereinigung $G \cup H$; die kanonische Einbettung bezeichnen wir mit
$$\iota : G \cup H \to E(G \cup H)$$
Sei N der Durchschnitt aller Normalteiler von $E(G \cup H)$, die die Elemente
$$\iota(gg')\iota(g)^{-1}\iota(g')^{-1} \qquad \iota(hh')\iota(h)^{-1}\iota(h')^{-1}$$
für $g, g' \in G$ und $h, h' \in H$ enthalten, und sei $G * H := E(G \cup H)/N$. Zeigen Sie: Sind $f_G : G \to F$ und $f_H : H \to F$ zwei Gruppenhomomorphismen in eine beliebige Gruppe F, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $k : G * H \to F$ mit
$$k(\overline{\iota(g)}) = f_G(g) \qquad k(\overline{\iota(h)}) = f_H(h)$$
für alle $g \in G$ und alle $h \in H$. (5)

23. Bestimmen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4. Zeichnen Sie alle Untergruppen in ein Diagramm, das graphisch darstellt, wie die Untergruppen ineinander enthalten sind. (Hinweis: Sie sollen also einerseits ein Bild malen, andererseits beweisen, daß Ihre Untergruppen-Liste vollständig ist.) (5)

24. Man bestimme alle Sylowuntergruppen der symmetrischen Gruppen S_4 und S_5. (Hinweis: Beweisen Sie, daß Ihre Listen vollständig sind.) (5)

Abgabe: Dienstag, 10.12.2002, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.