Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 5

Algebra I

17. Im Jahre 1873 bewies C. Hermite die Transzendenz von e; im Jahre 1882 bewies F. Lindemann die Transzendenz von π. Zeigen Sie unter Verwendung dieser Resultate, daß $e+\pi$ und $e\pi$ nicht beide algebraisch über $\mathbb{Q}$ sein können. (Hinweis: Es ist von beiden Zahlen nicht bekannt, ob sie algebraisch oder transzendent sind.) (3)

18. Zeigen Sie: Die Polynome

$$x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x], \quad x^5 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x], \quad x^4 + 2x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$$

sind irreduzibel. (3)

19. Betrachten Sie die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl ist. Zeigen Sie, daß die Gruppe G aller Automorphismen von $\mathbb{Z}_p$ isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ der von Null verschiedenen Elemente des Körpers $\mathbb{F}_p$ ist. (4)

20. (a) Für die Elemente

$$a = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

der Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ zeige man:
$\operatorname{ord}(a) = 4, \quad \operatorname{ord}(b) = 4, \quad \operatorname{ord}(c) = 3, \quad \operatorname{ord}(bc) = \operatorname{ord}(cb) = \infty.$ (4)

(b) $Q_8 =< a, b >$ heißt die Quaternionengruppe. Man zeige, daß

$$Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$$

ist und daß die angegebenen Elemente wirklich paarweise verschieden sind. (4)

(c) Das Zentrum von Q_8 ist $\{e, a^2\}$. (2)

Abgabe: Dienstag, 3.12.2002, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.