Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 4

# Algebra I

13. Sei $K$ ein Körper und $p_1, p_2 \in K[x]$ zwei von Null verschiedene Polynome. Wir benutzen $p_1$ und $p_2$ als Anfangsterme einer Folge von Polynomen, die folgendermaßen rekursiv definiert ist: Sind $p_{n-1}$ und $p_n$ bereits konstruiert und von Null verschieden, so sei $p_{n+1}$ das nach Aufgabe 9 eindeutig bestimmte Polynom, das die Gleichung

$$p_{n-1} = p_n q_n + p_{n+1}$$

für ein Polynom $q_n$, und $\mathrm{grad}(p_{n+1}) < \mathrm{grad}(p_n)$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, daß das Verfahren abbrechen muß und daß das letzte von Null verschiedene Polynom $p_m$ sowohl ein Teiler von $p_1$ als auch ein Teiler von $p_2$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß ein Polynom $p$, das sowohl ein Teiler von $p_1$ als auch ein Teiler von $p_2$ ist, auch das Polynom $p_m$ teilen muß.

(c) Zeigen Sie, daß es Polynome $p$ und $q$ mit der Eigenschaft

$$pp_1 + qp_2 = p_m$$

gibt. (6)

14. Sei $K \subset F$ eine endliche Körpererweiterung, $a \in F$ und $\mu_a \in K[x]$ das Minimalpolynom von $a$. Sei $p \in K[x]$ ein weiteres Polynom mit $b := p(a) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, daß es Polynome $r$ und $s$ in $K[x]$ mit der Eigenschaft $rp + s\mu_a = 1$ gibt.

(b) Zeigen Sie, daß $b^{-1} = r(a)$ ist.

(c) Drücken Sie das Inverse von $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ als Polynom in $\sqrt[3]{2}$ aus. (4)

15. Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung.

   (a) Zeigen Sie: Ist $t \in F$ ein transzendentes Element, so sind auch $t^2$ und $t+1$ transzendent.

   (b) Zeigen Sie: Ist $t^2$ transzendent, so ist auch $t$ transzendent.

   (c) Entscheiden Sie, ob folgende Aussage richtig ist: Sind $s, t \in F$ transzendent, so sind auch $s+t$ und $st$ transzendent. (4)

16. (a) Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Wir definieren eine Abbildung

$$\hat{f} : R[x] \to S[x],\ p \mapsto \hat{f}(p)$$

   durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}&\hat{f}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\\ &\qquad = f(a_n)x^n + f(a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + f(a_2)x^2 + f(a_1)x + f(a_0)\end{aligned}$$

   Zeigen Sie, daß $\hat{f}$ ein Ringhomomorphismus ist.

   (b) Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung und $G \subset \mathrm{Aut}(F/K)$ eine (nicht notwendig endliche) Untergruppe mit $K = \mathrm{Fix}(F, G)$. Sei $p \in F[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie, daß $p$ genau dann bereits in $K[x]$ liegt, wenn $\hat{\sigma}(p) = p$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

   (c) Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung und $G \subset \mathrm{Aut}(F/K)$ eine (nicht notwendig endliche) Untergruppe mit $K = \mathrm{Fix}(F, G)$. Sei $a \in F$. Zeigen Sie, daß $a$ genau dann algebraisch über $K$ ist, wenn die Bahn $\{\sigma(a) \mid \sigma \in G\}$ endlich ist. (6)

Abgabe: Dienstag, 26.11.2002, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.