Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 3

Algebra I

9. Sei K ein Körper.

   (a) Seien p und q Polynome mit Koeffizienten in K. Zeigen Sie, daß es Polynome r und s gibt, so daß $\text{grad}(r) < \text{grad}(q)$ und

   $$p = qs + r$$

   Dabei benutzen wir die Konvention, daß das Nullpolynom den Grad $-\infty$ hat.

   (b) Zeigen Sie, daß ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in K höchstens n Nullstellen besitzen kann.

   (c) Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung. Sei p ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in K, daß in F die verschiedenen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzt. Zeigen Sie: Liegen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ in K, so liegt auch x_n in K. (4)

10. Sei K ein Körper. Einem Polynom $p \in K[x]$ ordnen wir die Polynomabbildung

    $$K \to K, a \mapsto p(a)$$

    zu. Auf diese Weise entsteht ein Ringhomomorphismus

    $$\Phi : K[x] \to \text{Abb}(K, K)$$

    Zeigen Sie: Φ ist genau dann injektiv, wenn K unendlich viele Elemente enthält. (4)

11. Sei $\zeta = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta]$.

    (a) Bestimmen Sie eine Basis von K über $\mathbb{Q}$.

    (b) Zeigen Sie, daß es einen Körperautomorphismus σ von K mit $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta\sqrt[3]{2}$ gibt.

(c) Zeigen Sie: $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

(d) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subset K$ galoissch ist.

(e) Zeigen Sie: $K = \mathbb{Q}[\zeta + \sqrt[3]{2}]$ (6)

12. Sei $K \subset F$ eine galoissche Körpererweiterung, deren Galoisgruppe zur alternierenden Gruppe A_4 isomorph ist. Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenkörper $K \subset L \subset F$ mit $[L : K] = 3$. Entscheiden Sie für jeden solchen Zwischenkörper, ob die Erweiterung $K \subset L$ galoissch ist. (6)

Abgabe: Dienstag, 12.11.2002, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.