Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 2

Algebra I

5. Zeigen Sie, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Q}\sqrt[3]{4}$ nicht galoissch ist. (3)

6. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. In K gelte $1 + 1 \neq 0$.
   (a) Sei $a \in L \setminus K$. Zeigen Sie, daß a^2 eine Linearkombination von 1 und a über K ist.
   (b) Finden Sie ein Element $b \in L \setminus K$ mit $b^2 \in K$.
   (c) Zeigen Sie, daß es ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ mit $\sigma(b) = -b$ gibt.
   (d) Zeigen Sie, daß L/K galoissch ist.
   (e) Sei $\zeta := \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\zeta$ galoissch ist. (6)

7. Zeigen Sie:
   (a) Wenn $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$ ein Zwischenkörper mit $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in L$ ist, dann ist $[L : \mathbb{Q}] \geq 4$.
   (b) Es gibt einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ mit $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in K$ und $[K : \mathbb{Q}] = 4$.
   (c) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$. Ist $K/\mathbb{Q}$ galoissch?
   (d) Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(G)$ für jede Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$. (5)

8. Wir betrachten $\mathbb{Q}^3$ als Ring mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Zeigen Sie:
   (a) Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^3$.
   (b) ι ist injektiv. (Daher können wir im folgenden $\mathbb{Q}$ als Unterring von $\mathbb{Q}^3$ auffassen.)
   (c) Bestimmen Sie die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}^3)$ aller Ringautomorphismen von $\mathbb{Q}^3$. (Hinweis: Die kanonischen Basisvektoren e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{Q}^3$ erfüllen $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$.)

(d) Zeigen Sie, daß es eine echte Untergruppe G von $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}^3)$ mit $\mathrm{Fix}(G) = \mathbb{Q}$ gibt.

(e) Sind für jede Gruppe G die Gruppenhomomorphismen von G in die Gruppe $U(\mathbb{Q}^3)$ der (multiplikativ) invertierbaren Elemente von $\mathbb{Q}^3$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$? (6)

Abgabe: Dienstag, 5.11.2002, 11.15 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.