Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2002/2003
Blatt 1

Algebra I

1. (a) Zeigen Sie, daß $K := \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.
   (b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subset K$ eine galoissche Körpererweiterung ist. (5)

2. Zeigen Sie:
   (a) Der von 1, $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ aufgespannte $\mathbb{Q}$-Unterraum L von $\mathbb{R}$ ist sogar ein Unterring von $\mathbb{R}$.
   (b) Für ein von Null verschiedenes Element $x \in L$ ist die Abbildung
   $$L \to L, y \mapsto xy$$
   ein injektiver Vektorraumhomomorphismus.
   (c) L ist sogar ein Körper. (5)

3. (a) Seien $\mathbb{Q} \subset K$ und $\mathbb{Q} \subset L$ Körpererweiterungen. Wenn $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus ist, dann ist σ sogar ein $\mathbb{Q}$-Körperhomomorphismus.
   (b) Zeigen Sie: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}\}$ (5)

4. (a) Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, daß für reelle Zahlen r und s aus $r < s$ auch $\sigma(r) < \sigma(s)$ folgt.
   (b) Zeigen Sie: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}\}$
   (Hinweis: Die nichtnegativen reellen Zahlen sind gerade diejenigen, die als Quadrate geschrieben werden können.) (5)

Abgabe: Dienstag, 29.10.2002, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.