Mathematisches Institut **SS 2001**
der Universität München **Blatt 9**
Prof. Dr. B. Pareigis

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Seien m und n ganze Zahlen und g der größte gemeinsame Teiler von m und n. Wir können also ganze Zahlen m' und n' mit $m = gm'$ und $n = gn'$ finden. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{Z}_g \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n),\ \bar{k} \mapsto (\bar{l} \mapsto \overline{kln'})$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(Hinweis: Überlegen Sie sich, daß n' und m' teilerfremd sind, und daß daraus folgt, daß sich, wie in Aufgabe 40 auf Blatt 10 im WS 00/01, 1 durch n' und m' ausdrücken läßt.) (5)

2. Sei f ein Endomorphismus des endlichdimensionalen Vektorraumes V. Dann kann V mit Hilfe von f zu einem Modul über dem Polynomring $K[x]$ gemacht werden. Zeigen Sie, daß f genau dann diagonalisierbar ist, wenn V als $K[x]$-Modul direkte Summe von Untermoduln ist, die gleichzeitig eindimensionale Unterräume sind. (5)

3. Seien f und g zwei diagonalisierbare Endomorphismen des endlichdimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) f und g kommutieren, d. h. $f \circ g = g \circ f$.

   (b) f und g sind gleichzeitig diagonalisierbar, d. h. es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von sowohl f als auch g besteht.

   (5)

4. Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus von V heißt normal, falls er mit seiner adjungierten Abbildung kommutiert, d. h. falls $f \circ f^{ad} = f^{ad} \circ f$ gilt. Zeigen Sie, daß f genau dann normal ist, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f gibt.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß f und f^{ad} denselben Kern haben, und überlegen Sie dann, was das für die Eigenräume von f und f^{ad} bedeutet.) (5)

Abgabe: Mittwoch, 11.7.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.