Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Blatt 8

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Betrachten Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
mit reellen Einträgen. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix O, für die $O^T AO$ eine Diagonalmatrix ist. (5)

2. Geben Sie die Matrizen D_x und D_y an, die im $\mathbb{R}^3$ die Drehung um $\frac{\pi}{6}$ um die x-Achse bzw. die y-Achse beschreiben. Geben Sie die Matrix an, die die Komposition der beiden Drehungen beschreibt, wobei zuerst um die x-Achse und dann um die y-Achse gedreht wird. Bestimmen Sie die Drehachse der Komposition. (5)

3. Betrachten Sie die Abbildung
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2$$
Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
so daß für $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ und $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ gilt:
$$x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2 = \frac{7}{2}y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2$$
(4)

4. Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit reellen Einträgen. Zeigen Sie, daß sich A als Produkt $A = ODN$ schreiben läßt, wobei O eine

orthogonale Matrix, D eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Diagonalen, und N eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist.

(Hinweis: Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die Spaltenvektoren von A an. Dabei entsteht eine Orthonormalbasis, die aus den Spalten der benötigten Matrix O besteht. Die Diagonalmatrix entspricht dem Normierungsschritt im Gram-Schmidt-Verfahren. Die obere Dreiecksmatrix entspricht den Koeffizienten, die beim Übergang von der einen zur anderen Basis auftreten. Diese Zerlegung wird als Iwasawa-Zerlegung bezeichnet.) (6)

Abgabe: Mittwoch, 4.7.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.