Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Blatt 7

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Sei A eine reelle orthogonale 2×2-Matrix. Zeigen Sie, daß die Determinante von A entweder 1 oder -1 ist. Zeigen Sie weiter:

   (a) Ist die Determinante von A gleich 1, so gibt es eine reelle Zahl α mit
   $$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   (b) Ist die Determinante von A gleich -1, so gibt es eine reelle Zahl β mit
   $$A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

   (Hinweis: Wie in der Vorlesung definiert wurde, heißt eine reelle quadratische Matrix A orthogonal, wenn $A^T A = E$ gilt.) (6)

2. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Ist $f : V \to V$ ein Endomorphismus und
   $$p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$$
   ein Polynom mit Koeffizienten aus K, so kann man f in p einsetzen und erhält dann die lineare Abbildung
   $$p(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$
   Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.
   (4)

3. Der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$W_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \leq n : 0 \leq x_i \leq 1\}$$

   Erklären Sie, welcher Vektor die Diagonale in diesem Würfel beschreibt, und bestimmen Sie den Kosinus des Winkels zwischen dieser Diagonale und der Seite, die durch den ersten kanonischen Basisvektor bestimmt ist. Geben Sie diesen Winkel für $n = 2$ und $n = 4$ explizit an. (4)

4. Bestimmen Sie unter Verwendung eines Computeralgebraprogrammes (wie etwa Maple oder Mathematica) dasjenige reelle Polynom p vierten Grades, das die Bedingung

$$p(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

   in den Punkten $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ am besten approximiert.

   (Hinweis: Geben Sie bitte einen Ausdruck des mit Hilfe des Computeralgebraprogrammes erstellten Arbeitsblattes ab, auf dem Sie handschriftlich detailliert erläutern, was in den einzelnen Rechenschritten geschieht. Lassen Sie auf dem Blatt auch einen Plot des Polynoms anfertigen.) (6)

Abgabe: Mittwoch, 27.6.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.