Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Blatt 6

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & -i & 1-i \\ i & 2 & 1 \\ 1+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 2 & i & 4-3i \\ -i & 2 & -6-2i \\ 4+3i & -6+2i & 26 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen definieren mit

$$\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_3 \ni (x,y) \mapsto \overline{x}^T A_i y \in \mathbb{C}$$

eine positiv definite Bilinearform?

(5)

2. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \ni (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle := x^T A y \in \mathbb{R}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt ist. Bestimmen Sie bezüglich dieses Skalarprodukt die adjungierte Abbildung zu

$$f : \mathbb{R}_3 \ni x \mapsto Bx \in \mathbb{R}_3$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5)

3. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, daß A mindestens einen reellen Eigenwert besitzt, wenn n ungerade ist. (Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz. Diskutieren Sie sorgfältig, warum er anwendbar ist.) (5)

4. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellwertigen Funktionen. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$F : V \to V, f \mapsto F(f)$$

indem wir setzen: $F(f)(x) := f(-x)$. Zeigen Sie, daß 1 und -1 die einzigen Eigenwerte von F sind, daß beide Eigenwerte vorkommen und daß V die direkte Summe der zugehörigen Eigenräume ist. (Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, daß F linear ist.) (5)

Abgabe: Mittwoch, 13.6.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.